Dömölki B.

Dtár: 256
fsz.

M T A

KIBERNETIKAI KUTATÓ CSOPORTJA

Matematikai Osztály

Az M-3 utasitásrendszere alapján késziteett szabványos programok.

Sándor Ferenc
. . . .
/Sándor Ferenc/
MTA KKCS tud. munkatársa

Dömölki Bálint
. . . .
/Dömölki Bálint/
MTA KKCS.tud.segédmunkatársa

Révész Pálné
. . . .
/Révész Pálné/
MTA KKCS tud. gyakornoka

Szelezsán János
. . . .
/Szelezsán János/
MTA KKCS ösztöndijas gyak.

Veidinger László
. . . .
/Veidinger László/
MTA KKCS. tud. gyakornoka

Elfogadva 1958 febr.15.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA Kibernetikai Kutató Csoportja BUDAPEST

Varga Sándor
/Varga Sándor/
igazgató.

Tarján
/dr.Tarján Rezső/
igazgatóhelyettes.

Tartalmaz: 1o2 lapot
10 diagramot

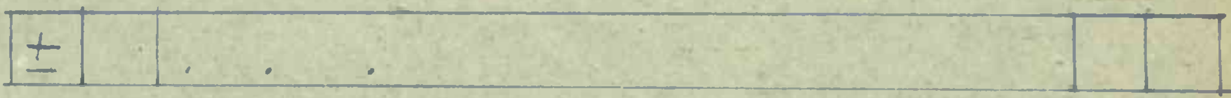
Készült: 4 drb. számozott példányban.
4. számu példány.

Budapest.
1957

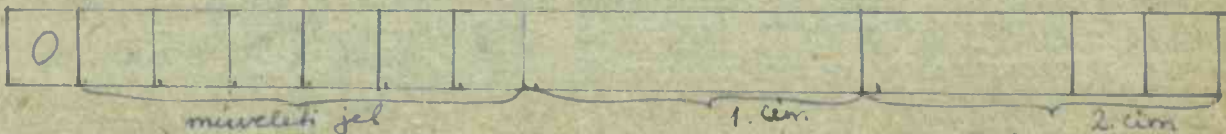
T a r t a l o m j e g y z é k

Az M-3 gép.

Az M-3 kétcimü, párhuzamos müködésü, fixponttal dolgozó gép. Ez utóbbi azt eredményezi, hogy csak abszolut értékben 1-nél kisebb számokat tudunk a gépben ábrázolni. Egy szó 31 bináris jegyből áll. Ha a szó számot ábrázol, akkor az első jegy az előjel / +=0,-=1/ a többi pedig a $2^{-1}, 2^{-2}, \ldots, 2^{-30}$ helyértékek:



Ha a szó utasitást ábrázol, az első jegy mindig 0, a következő hat a müveleti jelnek, az ezután következő tizenkét, tizenkét jegy az első illetve második cimnek felel meg:



Igy egy utasitás 8-as számrendszerben a következőképpen irható fel /pl/:

02 1346 3472

A gép el tudja végezni a négy alapmüveletet és a helyértékenkénti logikai szorzás müveletét. A legtöbb utasitásnál a müveletet az első és második cimen lévő számok között végzi a gép.

Mindenegyes müvelet eredménye bentmarad az aritmetikai egység B regiszterében. Ezenfelül a legtöbb utasitásnál az eredmény még a második cimre is beiródik. Egyes utasitásoknál - ezeket a "," jel jelzi - ez elmarad, és az eredmény csak a B-regiszterben marad meg. Ennek megfelelően vannak olyan utasitások is, amelyeknél a müveletet az első cim tartalma és az előző müvelet eredménye között végzi el a gép. Ezeket a "↓"

jel jelzi. A "," illetve "$\downarrow$" jelű utasitások használata a gép működését nagymértékben gyorsitja. A "Π" jelű utasitásoknál a művelet eredményének kinyomtatása is megtörténik. Végül a művelet jelének abszolut értékben való felirása /pl. $|+|$ / azt jelenti, hogy a műveletet a megfelelő számok abszolut értékén kell elvégezni.

A fenti jelek összekapcsolásával mindaz öt műveletnek ugyanazt a 8-féle változatát tudja a gép elvégezni. Vannak ezenfelül még vezérlési és megállási utasitások.

Az M-3 utasitás rendszere

ód:	Jel:	M a g y a r á z a t
00	$+$	Az első cim tartalmához hozzáadódik a második cim tartalma és beiródik a memóriába a második cimre.
10	$+,$	Az első cim tartalmához hozzáadódik a második cim tartalma, de a memóriába nem iródik be.
20	$\downarrow +$	Az előző müvelet eredményéhez hozzáadódik az első cim tartalma és az eredmény beiródik a memóriába a második cimre.
30	$\downarrow +,$	Az előző müvelet eredményéhez hozzáadódik az első cim tartalma, de a memóriába nem iródik be.
40	$+\pi$	Az első cim tartalmához hozzáadódik a második cim tartalma. Az eredmény beiródik a memóriába a második cimre és kinyomtatódik.
50	$\|+\|,$	Az első cim tartalmának abszolut értékéhez hozzáadódik a második cim tartalmának abszolut értéke, de a memóriába nem iródik be.
60	$\downarrow +\pi$	Az előző müvelet eredményéhez hozzáadódik az első cim tartalma. Az eredmény beiródik a memóriába a második cimre és kinyomtatódik.
70	$\downarrow \|+\|,$	Az előző müvelet eredményének abszolut értékéhez hozzáadódik az első cim tartalmának abszolut értéke, de a memóriába nem iródik be.
01	$-$	A második cim tartalmából kivonódik az első cim tartalma és az eredmény beiródik a memóriába a második cimre.
11	$-,$	A második cim tartalmából kivonódik az első cim tartalma, de a memóriába nem iródik be, - az eredmény megmarad az aritmetikai egységben.

$\downarrow -$ Az előző müvelet eredményéből kivonódik az első cim tartalma, az eredmény beiródik a memóriába a második cimre.

$\downarrow -,$ Az előző müvelet eredményéből kivonódik az első cim tartalma, az eredmény nem iródik le.

$-\Pi$ A második cim tartalmából kivonódik az első cim tartalma, az eredmény beiródik a második cimre és kinyomtatódik.

$|-|,$ A második cim tartalmának abszolut értékéből kivonódik az első cim tartalmának abszolut értéke, az eredmény nem iródik le.

$\downarrow -\Pi$ Az előző müvelet eredményéből kivonódik az első cim tartalma. Az eredmény beiródik a második cimre és kinyomtatódik

$\downarrow |-|,$ Az előző müvelet eredményének abszolut értékéből kivonódik az első cim tartalmának abszolut értéke, de a memóriába nem iródik be.

$:$ A másdik cim tartalma elosztódik az első cim tartalmával. Az eredmény beiródik a memóriába a második cimre.

$:,$ A második cim tartalma elosztódik az első cim tartalmával. Az eredmény a memóriába nem iródik be.

$\downarrow :$ Az előző müvelet eredménye elosztódik az első cim tartalmával és az eredmény beiródik a memóriába a második cimre.

$\downarrow :,$ Az előző müvelet eredménye elosztódik az első cim tartalmával. Az eredmény a memóriába nem iródik be.

$:\Pi$ A második cim tartalma elosztódik az első cim tartalmával. Az eredmény beiródik a memóriába a második cimre és kinyomtatódik.

$|:|,$ A második cim tartalmának abszolut értéke elosztódik az első cim tartalmának abszolut értékével, de a memóriába nem iródik be.

$\downarrow :\Pi$ Az előző müvelet eredménye elosztódik az előző cim tartal mával. Az eredmény beiródik a memóriába a második cimre és kinyomtatódik.

72 $\downarrow |:|,$ Az előző müvelet eredményének abszolut értéke elosztódik az első cim tartalmának abszolut értékével, de a memóriába nem iródik be.

03 $\times$ A második cim tartalma összeszorzódik az első cim tartalmával. Az eredmény beiródik a memóriába a második cimre.

13 $\times,$ A második cim tartalma összeszorzódik az első cim tartalmával. Az eredmény a memóriába nem iródik be.

23 $\downarrow\times$ Az előző müvelet eredménye összeszorzódik az első cim tartalmával. Az eredmény beiródik a memóriába a második cimre.

33 $\downarrow\times,$ Az előző müvelet eredménye összeszorzódik az első cim tartalmával. Az eredmény a memóriába nem iródik be.

43 $\times\Pi$ A második cim tartalma összeszorzódik az első cim tartalmával. Az eredmény beiródik a memóriába a második cimre és kinyomtatódik.

53 $|\times|,$ A második cim tartalmának abszolut értéke összeszorzódik az első cim tartalmának abszolut értékével, de a memóriába nem iródik be.

63 $\downarrow\times\Pi$ Az előző müvelet eredménye összeszorzódik az első cim tartalmával. Az eredmény beiródik a memóriába a második cimre és kinyomtatódik.

73 $\downarrow|\times|,$ Az előző müvelet eredményének abszolut értéke összeszorzódik az első cim tartalmának abszolut értékével, de a memóriába nem iródik be.

06 $\wedge$ A második cim tartalma logikailag összeszorzódik az első cim tartalmával, és az eredmény beiródik a memóriába a második cimre.

16 Λ, A második cim tartalma logikailag összesszorzódik az első cim tartalmával. Az eredmény megmarad az aritmetikai egységben.

26 ↓ Λ Az előző müvelet eredménye logikailag összeszorzódik az első cim tartalmával és az eredmény beiródik a memóriába a második cimre.

36 ↓ Λ, Az előző müvelet eredménye logikailag összeszorzódik az első cim tartalmával. Az eredmény a memóriába nem iródik be.

46 Λπ A második cim tartalma logikailag összeszorzódik az első cim tartalmával. Az eredmény beiródik a memóriába a második cimre és kinyomtatódik.

56 |Λ|, A második cim tartalmának abszolut értéke logikailag összeszorzódik az első cim tartalmának abszolut értékével. Az eredmény a memóriába nem iródik be.

66 ↓ Λπ Az előző müvelet eredménye logikailag összeszorzódik az első cim tartalmával. Az eredmény beiródik a memóriába a második cimre és kinyomtatódik.

76 ↓ |Λ|, Az előző müvelet eredményének abszolut értéke logikailag összeszorzódik az első cim tartalmának abszolut értékével, de a memóriába nem iródik be.

07; 27 Bb Szám bevitele. A szám a perforált szalagról beiródik a második cimre. A regiszterben nem marad meg.

05; 15 ПЧ Az első cim tartalma átmegy a második cimre és megmarad az aritmetikai egység kettes számu regiszterében.

45; 55 ПЧπ Az első cim tartalma átmegy a második cimre és kinyomtatódik, de az aritmetikai egységben nem marad meg.

24 ПУ Vezérlés átadás. A következő utasitást a gép az első cimről veszi. Az előző müvelet eredménye beiródik a második cimre és megmarad az aritmetikai egységben.

64 ПУП Ugyanaz mint a 24-es utasitás, de a szám még ki is nyomtatódik.

74 Пу A következő utasitást a gép a második cimről veszi. Az aritmetikai egységben megmarad az előző művelet eredményének abszolut értéke.

34 УП Feltételes ugrás. A következő utasitást a gép a második cimről veszi, ha az előző művelet eredménye pozitiv, és az első cimről ha az előző művelet eredménye negativ.

04, 14, 44, 54, 17, 37, 57, 77 megállás. A megállási utasitások az aritmetikai egység regisztereinek, valamint a kiválasztó és beinditó regitszerek tartalmában különböznek egymástól.

\- - - - - - - - -

A logikai szorzás - ez helyértékenkénti operáció, a következő szabályok szerint:

0 x 0 = 0

0 x 1 = 0

1 x 0 = 0

1 x 1 = 1

Készitette: Révész Pálné
Ellenőrizte: Sándor Ferenc

Szubrutin az $x = \sqrt[n]{a}$ függvény kiszámitásához.

A feladatot át lehet fogalmazni a következő módon:

Az $x^n - a = 0$ egyenletnek egyik valós gyökét kell megtalálni.

Az algebrai egyenletek megoldására ismeretes a Newton féle iterációs módszer. Lényege a következő:

Ha $f(x) = x^n - a$, akkor ez a függvény egy n-ed foku parabolával ábrázolható. Feladatunk tehát az, hogy megtaláljuk azt az x pontot, ahol ez a parabola metszi az x tengelyt. Következőképen járunk el:

Felvesszünk egy x_0 kezdeti értékét. Meghuzzuk ebben az x_0 pontban a görbe érintőjót és megkeressük azt az x_1 pontot, ahol ez az egyenes metszi az x tengelyt. Ezzel az uj x_1 ponttal megismételjük az előbbi eljárást.

Az iterációs formula képletben:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$$

ahol $f'/x/$ az $f/x/$ függvény deriváltja.

Az adott esetben

$$x_k = x_{k-1} - \frac{x_{k-1}^n - a}{n\, x_{k-1}^{n-1}}$$

Kezdeti értéknek vesszük az $x_0=1$ pontot. Akkor az iterációs eljárás konvergens lesz és felülről monoton közeledik a gyökhöz.

Mivel a gép az 1 számmal nem tud dolgozni, tehát tulajdonképen nem ezzel indul, hanem az $x_1 = \frac{n-1}{n} + \frac{a}{n}$ értékkel, amit az 1-el való indulás esetén második közelitésnek kapunk. n-re vonatkozóan kikötjük azt, hogy $n < 2^{30}$.

Programm

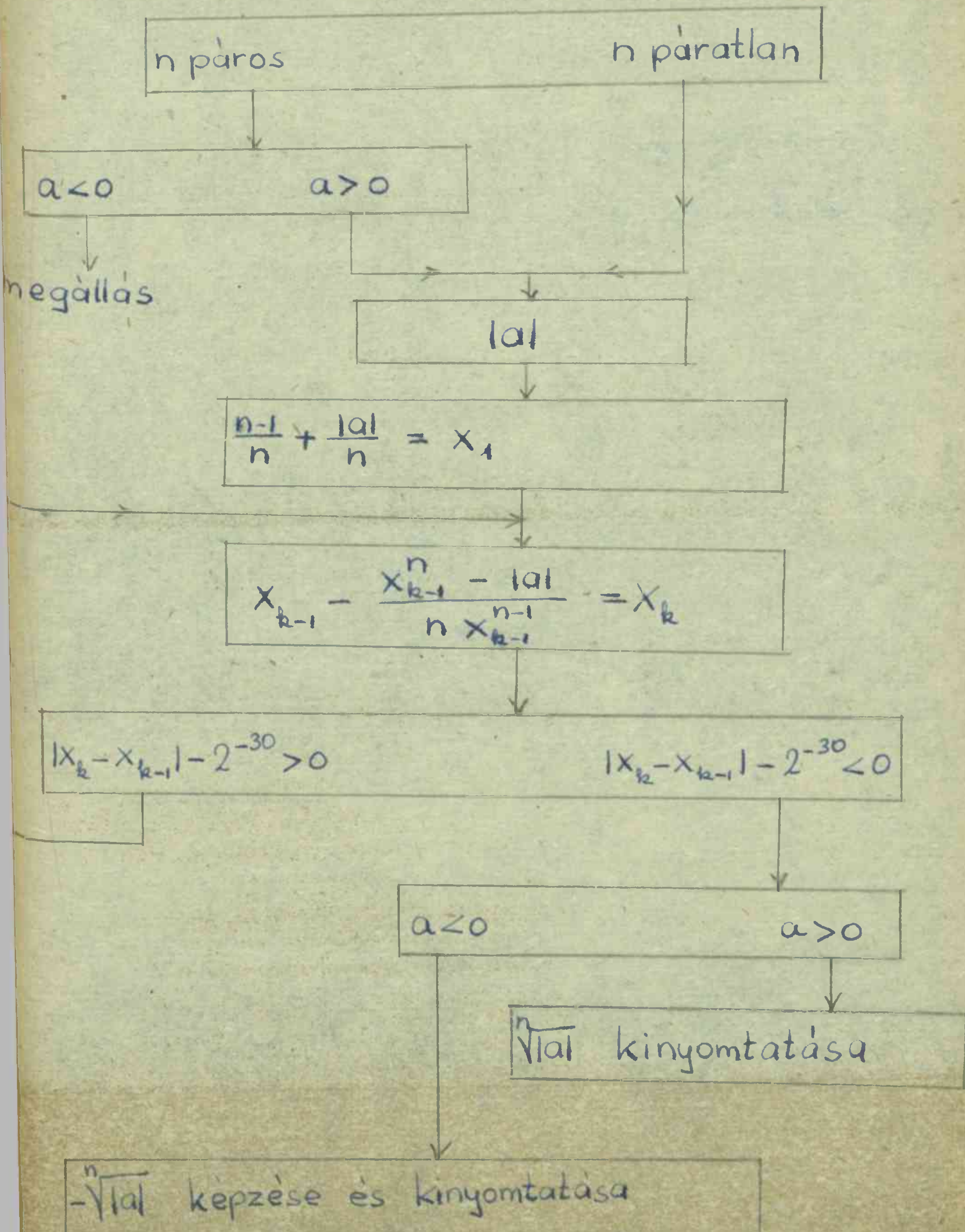
Sorszám:	kód:	jel:	1 cim	2 cim	
0001	16	Λ,	0102	0101	
0002	20	↓+	0000	0105	Ha n páros és "a" negativ, akkor megáll
0003	11	−,	0105	0000	
0004	34	Yπ	0010	0005	
0005	10	+,	0100	0000	
0006	34	Yπ	0007	0010	
0007	Megállási utasitás				
0010	06	Λ	0100	0104	→ $\|a\|$
0011	20	↓+	0000	0114	
0012	11	−,	0102	0101	
0013	22	↓:	0101	0106	
0014	12	:,	0101	0102	x_1 képzése
0015	20	↓+	0000	0107	
0016	33	↓×,	0114	7777	
0017	20	↓+	0106	0110	→ $x_1 = \frac{n-1}{n} + \frac{a}{n}$
0020	20	↓+	0000	0106	→ — " —
0021	11	−,	0103	0101	
0022	20	↓+	0000	0111	
0023	03	×	0110	0106	x_1^n képzése
0024	01	−	0102	0111	
0025	34	Yπ	0026	0023	
0026	11	−,	0114	0106	
0027	20	↓+	0000	0112	
0030	02	:	0110	0106	
0031	13	×,	0107	0112	
0032	22	↓:	0106	0112	
0033	11	−,	0112	0110	A következő tag képzése
0034	20	↓+	0000	0106	az iterációval
0035	05	πr	0110	0113	
0036	05	πr	0106	0110	
0037	51	|−|,	0113	0106	Ha a közelités még nem
0040	71	↓|−|,	0102	7777	elég pontos,visszaugrik.
0041	34	Yπ	0042	0021	
0042	10	+,	0000	0100	Ha "a" negativ és n pá-
0043	34	Yπ	0044	0046	ratlan, akkor $-\sqrt[n]{\|a\|}$
0044	11	−,	0110	0000	képzése
0045	20	↓+	0000	0110	
0046	40	↓π	0000	0110	

Konstansok

/0100/ = a
/0101/ = n . 2^{-30}
/0102/ = + 00 0000 0001
/0000/ = + 00 0000 0000
/0103/ = + 00 0000 0002
/0104/ = + 77 7777 7777

$$\left.\begin{array}{l}/0105/\\/0106/\\/0107/\\/0110/\\/0111/\\/0112/\\/0113/\\/0114/\end{array}\right\}\ \text{munkapoziciók}$$

Menetrend.


n páros
n páratlan
a<0
a>0
megállás
|a|
$\frac{n-1}{n} + \frac{|a|}{n} = x_1$
$x_{k-1} - \frac{x_{k-1}^n - |a|}{n\, x_{k-1}^{n-1}} = x_k$
$|x_k - x_{k-1}| - 2^{-30} > 0$
$|x_k - x_{k-1}| - 2^{-30} < 0$
a<0
a>0
$\sqrt[n]{|a|}$ kinyomtatása
$-\sqrt[n]{|a|}$ képzése és kinyomtatása

Készitette: Révész Pálné
Ellenőrizte: Sándor Ferenc

A Newton féle iterációs módszer konvergenciájának becslése az $f(x)=x^n-a$ függvény esetében.

A konvergencia gyorsaságának becslésénél felhasználjuk a következő eredményeket, amelyek Rényi Alfréd "A Newton-féle gyökközelitő eljárásról" c. dolgozatában szerepelnek.

Legyen

$$N(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

Ekkor

$$\frac{dN(x)}{dx}=\frac{f(x)\,f''(x)}{f'^2(x)}=H(x)$$

Legyen q a $H(x)$ függvény egy felső korlátja a $(\xi-h,\ \xi+h)$ intervallumban, ahol ξ az $f(x)=0$ egyenlet keresett gyöke.

Ekkor igaz a következő egyenlőtlenség:

$$|x_{k+1}-\xi|<q^k\,|x_1-\xi|$$

ahol x_k a k-adik iterációval kapott közelitő gyök $(k=1,2,\dots)$

$$x_1 \qquad (\xi-h<x_1<\xi+h)$$

az első közelités, tehát az iteráció kezdő értéke. Látható, hogy a módszer konvergens, ha $|q|<1$

A mi esetünkben alkalmazzuk ezeket az összefüggéseket.

Ekkor $f(x)=x^n-a \qquad 0\le a<1$

és $H(x)=\frac{n-1}{n}\left(1-\frac{a}{x^n}\right) \qquad x_1=1$

q-t a $H(x)$ felső határának válasszuk.

Be fogjuk bizonyitani, hogy a $(0,1)$ intervallumban a $H(x)$ függvény felső határa:

$$H(1)=q=\frac{n-1}{n}(1-a)<1$$

__Bizonyitás:__ Be fogjuk látni, hogy $H(x)$ ebben az esetben az intervallumban monoton nő, ekkor felső határa megegyezik az intervallum végpontján felvett értékkel.

H/x/ monoton növekvő, mert

$$\frac{dH(x)}{dx} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{an}{x^{n+1}} = \frac{a(n-1)}{x^{n+1}} > 0 \qquad (0 < x \leq 1)$$

Tehát q valóban egyenlő $\frac{n-1}{n}(1-a)$ -val.

Felirjuk erre az esetre az egyenlőtlenséget:

$$|x_{k+1} - \xi| < \left(\frac{n-1}{n}\right)^k (1-a)^k (1-\xi)$$

Esetünkben k-nak olyannak kell lennie, hogy

$|x_{k+1} - \xi| < 10^{-10}$ teljesüljön.

Ezért a $\left(\frac{n-1}{n}\right)^k (1-a)^k (1-\xi) = 10^{-10}$ exponenciális egyenletet kell megoldani k-ra, ha n és a ismert.

Ennek alapján számitott k értékek:

a \ n	2	5	10
0,1	28	67	100
0,5	16	23	25
0,9	7	8	8

Készitette: Révész Pálné
Ellenörizte: Sándor Ferenc

Az $y=e^x$ függvény kiszámitásának szubrutinja.

Az $y=e^x$ függvény kiszámitása az $x=x_0$ helyen a következőképen történik. Mivel az M-3 számológép fix tizedesponttal dolgozik, ezért csak olyan x-ek jöhetnek számitásba, ahol $0<e^x<1$ és $-1<x<0$ és ezért igen nehézkes lenne igy számolni. Hogy ezt kiküszöböljük, ugy tekintjük, mintha ez a fix tizedespont a 2^{-15} bináris helyérték után lenne elhelyezve. Ábrában:

Eredetileg:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

fix pont

Az előjel helye, amely után következik a fix pont, tehát a szám mindig ugy néz ki, hogy

0,. . . . .

Módositva:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

fix pont

előjel egész rész tört rész

A gép ezt ugy érzékeli, hogy nem x van benne, hanem $x.2^{-15}$ és ezt a programmozásnál figyelembe kell venni.

Ilyen feltételek mellett követelmény, hogy $e^x < 2^{15}$.

mert ez a legnagyobb szám , ami a gépbe belefér.

Ebből azt kapjuk, hogy $|x| < 10,5$

x-nek az egész része e szerint legfeljebb 4 bináris helyértéket foglal el a gépben. Tehát ez az x szám a következőképen helyezkedhet el:

•	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

előjel

•=0 vagy 1

Az e^x elfoglalhatja az összes helyértékeket.

Most vegyük fel a következő szűrőszámokat:

a_1= 1000,000000000000000 = 2^3

a_2= 0100,000000000000000 = 2^2

. . . .

a_{19}=0000,000000000000001 = 2^{-15}

Amelyek a gépben a következőképen néznek ki:

a_1

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

a_2

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

. . . .

a_{19}

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Tehát számértékük a gépben: 2^{-12}, 2^{-13}, ... , 2^{-30}

Minden a mi intervallumunkban eső bináris szám felirható a következő módon:

$x = \sum_{i=1}^{19} a_i k_i$ ahol k_i az x szám i-odik bináris számjegye és a számozást a legnagyobb helyértékü számjegynél kezdjük.

Például:

x=1011,100100011010111

$k_1 k_2$ . . . .

Ez a szám a következőképen bontható így fel

$$x = 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 1 \cdot a_3 + 1 \cdot a_4 + 1 \cdot a_5 + 0 \cdot a_6 + 0 \cdot a_7 + 1 \cdot a_8 + \\ + 0 \cdot a_9 + 0 \cdot a_{10} + 0 \cdot a_{11} + 1 \cdot a_{12} + 1 \cdot a_{13} + 0 \cdot a_{14} + 1 \cdot a_{15} + 0 \cdot a_{16} + \\ + 1 \cdot a_{17} + 1 \cdot a_{18} + 1 \cdot a_{19} =$$

$$= a_1 + a_3 + a_4 + a_5 + a_8 + a_{12} + a_{13} + a_{15} + a_{17} + a_{18} + a_{19}$$

Tehát $e^x = e^{\sum_{i=1}^{19} a_i k_i}$ ebből viszont

$$e^x = \prod_{i=1}^{19} e^{a_i k_i}$$

Az e^{a_i} számok konstansok, amelyeket előre ki lehet számitani és beletenni a gépbe, tehát az e^x-et ki lehet számitani tisztán szorzások utján.

A gép a számitást ugy végzi el, hogy minden i-re megnézi, hogy a_i valóban szerepel-e x felbontásában. Ha szerepel, akkor e^{a_i}-vel megszorozza a meglévő részletszorzatot.

Mivel az eljárásnál nem vettük figyelembe x előjelét, tehát csak $e^{|x|}$-et kapjuk meg. Ha x negativ, akkor ki kell számitani az $\frac{1}{e^{|x|}}$-et, ami már valóban az e^x-et szolgáltatja. A gépbe bé van épitve az osztás is, tehát ez igen könnyen számitható.

P r o g r a m m .

Jelölés: (a) = "a" pozició tartalma. $(\delta) = x$

A kis görög betük cimeket jelentenek.

Pozició szám	kód	szimbólum	1.cim	2.cim	Megjegyzés
0001	51	$\|-\|,$	δ	γ	$10{,}5-\|x\|$
0002	34	$\Upsilon\pi$	0003	0010	ugrik, ha $\|x\|<10{,}5$
0003	10	$+,$	δ	0000	előjel vizsgálat ugrik, ha $x>0$
0004	34	$\Upsilon\pi$	0005	0007	
0005	40	$+\pi$	0000	0000	0-t kinyomtatja és elmegy a ψ helyen lévő utasitásra
0006	24	$\pi\Upsilon$	ψ	ψ	
0007	megállási		utasitás		
0010	16	$\wedge,$	α	δ	Megvizsgálja: x tartalmazza-e a_1-t. Ha nem tartalmazza, akkor ugrik.
0011	31	$\downarrow -,$	$\alpha+18$	$-$	
0012	34	$\Upsilon\pi$	0015	0013	
0013	13	$\times,$	β	ε	
0014	22	$\downarrow :$	$\alpha+3$	ε	a e^{a_i}-k összeszorzása
0015	00	$+$	ϑ	0010	cim módositás
0016	00	$+$	ϑ	0013	
0017	01	$-$	$\alpha+3$	φ	ciklusszámlálás. Ha még nincs vége, visszaugrik.
0020	34	$\Upsilon\pi$	0021	0010	
0021	10	$+,$	δ	0000	Előjel vizsgálat. Ha positiv, akkor ugrik
0022	34	$\Upsilon\pi$	0023	0025	
0023	12	$:,$	ε	$\alpha+18$	$\frac{1}{e^{\|x\|}}$ képzése és ε-ba vitele
0024	20	$\downarrow +$	0	ε	
0025	40	$+\pi$	0	ε	ε tartalmának kinyomtatása
0026	24	$\pi\Upsilon$	ψ	ψ	

Konstansok

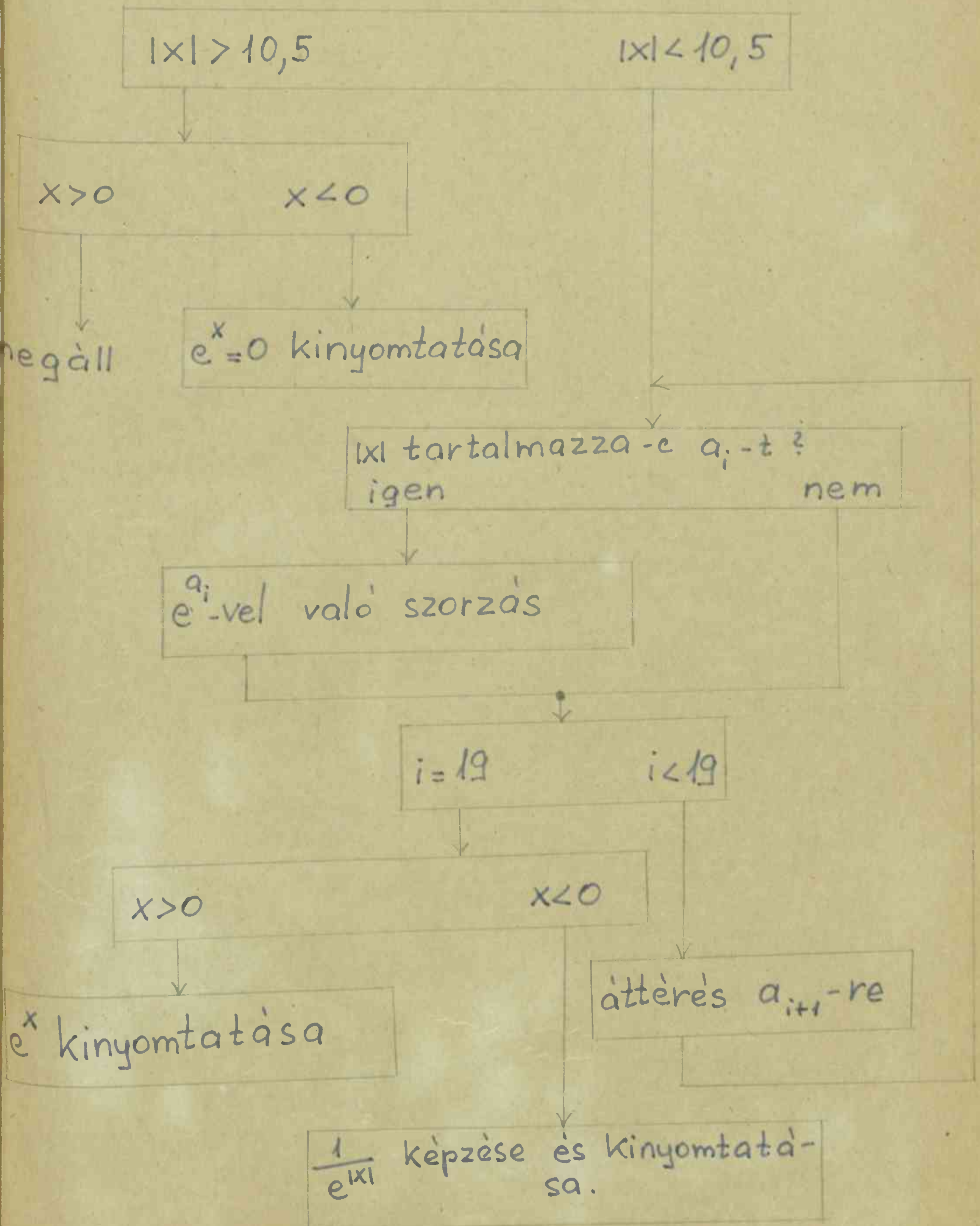
$(\alpha) = 2^{-12} = a_1,\ (\alpha+1) = 2^{-13} = a_2, \dots, (\alpha+18) = 2^{-30} = a_{19}$

$(\beta) = e^{a_1},\ (\beta+1) = e^{a_2}, \dots, (\beta+18) = e^{a_{19}}$

$(\gamma) = 10{,}5 \cdot 2^{-15},\ (\varepsilon) = 2^{-15},\ (\vartheta) = 2^{-11},\ (\varphi) = 18 \cdot 2^{-15},\ (0000) = 0$

ψ Szubrutin után következő első utasitás.

Menetrend.


|x| > 10,5
|x| < 10,5
x > 0
x < 0
megáll
e^x = 0 kinyomtatása
|x| tartalmazza-e a_i-t ?
igen
nem
e^(a_i)-vel való szorzás
i = 19
i < 19
x > 0
x < 0
e^x kinyomtatása
áttérés a_(i+1)-re
1/e^|x| képzése és kinyomtatása.

Készitette: Pömölki Bálint
Ellenörizte: Sándor Ferenc

Az y=lnx függvény kiszámításának szubrutinja az M-3 gépre.

Az x argumentum 0-tól $+\infty$-ig változhatik. Ezért a fix bináris pontot a 15-ik helyérték mögé helyezzük, azaz x helyett $\dot{x}=x2^{-15}$-el számolunk. Igy $2^{-15} \leq x < 2^{15}$. Ekkor $|\ln x| < 2^{4}$ lesz. Igy a gép kapacitásának teljes kihasználása céljából az eredménynél a pontot a 4-ik helyérték mögé helyezzük, azaz $\underline{y}=y.2^{-4}$ jelölést bevezetve x-ből fogjuk megkapni <u>ln x</u>-et.

A logaritmus függvényt Taylor sorral közelitjük, ami csak az 1 közelében konvergál elég gyorsan, ezért x-et az $/ 1, \frac{6}{5} /$ intervallumba képezzük le. Ezt a következő lépésekben végezzük el:

1./ $x=d.2^{q}$ $\quad / \frac{1}{2} \leq d < 1$ és $-15 \leq q \leq 15$ /

Mivel a gépben $\dot{x}=x.2^{-15}$ van, tkp. ezt hozzuk $\dot{x}=d.2^{q-15}=d.2^{-k}$ alakra, ahol ~~-30 k 0~~. $0 \leq k < 30$

2./ A $t=/ \frac{6}{5} /^{i}.d$ leképzéssel, ahol i=1,2,3, v.4, aszerint, hogy d az $\left[\frac{5}{6}, 1\right)$, $\left[\left(\frac{5}{6}\right)^{2}, \frac{5}{6}\right)$, $\left[\left(\frac{5}{6}\right)^{3}, \left(\frac{5}{6}\right)^{2}\right)$, $\left[\frac{1}{2}, \left(\frac{5}{6}\right)^{3}\right)$ intervallumok közül melyikben van, $1 \leq t < \frac{6}{5}$-öt kapunk.

3./ A $t=1+\frac{z+1}{10}$ leképzéssel $-1 \leq z < 1$-et kapunk.

Igy

$$\ln t = \ln/1+\frac{z+1}{10}/=\frac{z+1}{10}-\frac{1}{2}.\left/\frac{z+1}{10}\right/^{2}+\frac{1}{3}.\left/\frac{z+1}{10}\right/^{3}-\frac{1}{4}.\left/\frac{z+1}{10}\right/^{4}+\frac{1}{5}.\left/\frac{z+1}{10}\right/^{5}-$$

$$-\frac{1}{6}.\left/\frac{z+1}{10}\right/^{6}+\frac{1}{7}.\left/\frac{z+1}{10}\right/^{7}-\frac{1}{8}.\left/\frac{z+1}{10}\right/^{8}+\frac{1}{9}.\left/\frac{z+1}{10}\right/^{9}-\frac{1}{10}.\left/\frac{z+1}{10}\right/^{10}+$$

$$+R_{10}$$

ahol az R_{10} maradéktagra

$$|R_{10}| = \left|\frac{1}{11}.\left(\frac{\frac{z+1}{10}}{1+\xi}\right)^{11}\right| < \frac{1}{11}.\left(\frac{1}{5}\right)^{11} < 0{,}20 \,.\, 10^{-8}$$

mert

$$0 \leq \xi \leq \frac{z+1}{10} < \frac{1}{5}$$

A hatványozásokat elvégezve:

$$\ln t = C_0' + C_1'z + C_2'z^{2} + \,........\, + C_8'z^{8} + C_9'z^{9} + C_{10}'z^{10} + R_{10}$$

$$c^*_{10} = 0{,}001.10^{-8}$$

ahol $c^*_9 < 0{,}002.10^{-8}$

$$c^*_8 < 0{,}070.10^{-8}$$

$$c^*_7 < 0{,}71.10^{-8}$$

$$c^*_6 < 9{,}5.10^{-8}$$

Igy

$$|R'| = |c^*_8 z^8 + c^*_9 z^9 + c^*_{10} z^{10^{-8}}| < 0{,}08.10^{-8}$$

A közelitő polinom fokszáma tovább redukálható, ha felirjuk a 6.- és 7.-edfoku Csebisov-polinomokat.

$$|T_7(z)| = \left|z^7 - \frac{7}{4}z^5 + \frac{7}{8}z^3 - \frac{7}{64}z\right| \leq \frac{1}{64}$$

$$|T_6\, z| = \left|z^6 - \frac{3}{2}z^4 + \frac{9}{16}z^2 - \frac{1}{32}\right| \leq \frac{1}{32}$$

mert

$$T_n(z) = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \cos\, /n \operatorname{arc} \cos z/$$

Igy

$$c^*_6 z^6 + c^*_7 z^7 = c^*_6 \left(\frac{3}{2}z^4 - \frac{9}{16}z^2 + \frac{1}{32}\right) + c^*_7 \left(\frac{7}{4}z^5 - \frac{7}{8}z^3 + \frac{7}{64}z\right) + R''$$

ahol $|R''| \leq \frac{9{,}5}{32} \cdot 10^{-8} + \frac{0{,}71}{64} \cdot 10^{-8} < 0{,}32.10^{-8}$

Tehát a

$c_0 = c^*_0 + \frac{1}{32} \cdot c^*_6 = +0{,}095\ 310\ 177$

$c_1 = c^*_1 + \frac{7}{64} \cdot c^*_7 = +0{,}090\ 909\ 092$

$c_2 = c^*_2 - \frac{9}{16} \cdot c^*_6 = -0{,}004\ 132\ 178$

$c_3 = c^*_3 - \frac{7}{8} \cdot c^*_7 = +0{,}000\ 250\ 432$

$c_4 = c^*_4 + \frac{3}{2} \cdot c^*_6 = -0{,}000\ 017\ 217$

$c_5 = c^*_5 + \frac{7}{4} \cdot c^*_7 = +0{,}000\ 001\ 254$

együtthatókkal:

$$\ln t = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + c_5 z^5 + E$$

ahol

$$|E| \leq |R_{10}| + |R'| + |R''| < 0{,}60.10^{-8}$$

mig a legkisebb figyelembevehető helyérték $2^{-26} \approx 1{,}5.10^{-8}$.

Igy

$\underline{\ln}\ x = q\underline{\ln}2 + \underline{\ln}d = q\underline{\ln}2 - i\underline{\ln}\frac{6}{5} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + c_5 z^5$

P r o g r a m m

0001	11	−,	0101	0100	
0002	34	γπ	0003	0004	$x \leq 0$-ra megáll
0003			m e g á l l á s		
0004	12	:,	0102	0103	
0005	20	↓+	0000	0116	→ 16 $\underline{\ln}2$
0006	05	π↯	0100	0117	$\dot{x} \geq \frac{1}{2}$ -re $d = \dot{x}$, azaz $k = 0$
0007	01	−	0103	0116	$\dot{x} < \frac{1}{2}$ -re eltoljuk balra
0010	51	|−|,	0104	0117	k számjeggyel, amig
0011	34	γπ	0012	0014	$d = 2^k \cdot x \geq \frac{1}{2}$ nem less.
0012	02	:	0104	0117	A végén 0116 = /15-k/$\underline{\ln}$ 2
0013	24	πγ	0007	0117	
0014	03	×	0104	0117	→ $\frac{d}{2}$
0015	01	−	0105	0116	$\left(\frac{6}{5}\right)^i \cdot \frac{d}{2} \geq \frac{1}{2}$-re 0120-ba $\frac{1}{2}\left(\left(\frac{6}{5}\right)^i d-1\right)$ ke-
0016	02	:	0106	0117	rül; $\left(\frac{6}{5}\right)^i \cdot \frac{d}{2} < \frac{1}{2}$-re a $\frac{6}{5}$-el való szorzás
0017	21	↓−	0104	0120	folytatódik. A végén: (0116) =
0020	34	γπ	0015	0021	$= (15-k)\underline{\ln}2 - i\underline{\ln}\frac{6}{5}$
0021	02	:	0104	0120	→ $\left(\frac{6}{5}\right)^i \cdot d-1$
0022	11	−,	0107	0120	$= \dfrac{\left(\frac{6}{5}\right)^i d-1-0{,}1}{0{,}1}$
0023	22	↓:	0107	0120	
0024	05	π↯	0110	0117	
0025	13	×,	0117	0120	
0026	20	↓+	0111	0117	→ $\underline{\ln}$ t
0027	00	+	0035	0026	A polinom kiszámitása Horner el-
0030	51	|−|,	0026	0036	rendezéssel
0031	34	γπ	0032	0025	
0032	01	−	0037	0026	
0033	00	+	0116	0117	→ $\underline{\ln}$ x
0034	24	πγ	....	....	visszatérés a vezérprogramra
0035	00	+	0001	0000	Pszeudo-utasitások
0036	20	↓+	0115	0117	
0037	00	+	0005	0000	

Konstansok:

/0000/ = 0

/0100/ = x

/0101/ = 2^{-30}

/0102/ = 2^{-4}

/0103/ = $\underline{\ln 2}$

/0104/ = $\frac{1}{2}$

/0105/ = $\underline{\ln \frac{6}{5}}$

/0106/ = $\frac{5}{6}$

/0107/ = 0,1

/0110/ = $\underline{c}_5$ = +0,000 001 254 . 2^{-4}

/0111/ = $\underline{c}_4$ = -0,000 017 217 . 2^{-4}

/0112/= $\underline{c}_3$ = +0,000 250 432 . 2^{-4}

/0113/ = $\underline{c}_2$ = -0,004 132 178 . 2^{-4}

/0114/ = $\underline{c}_1$ = +0,090 909 092 . 2^{-4}

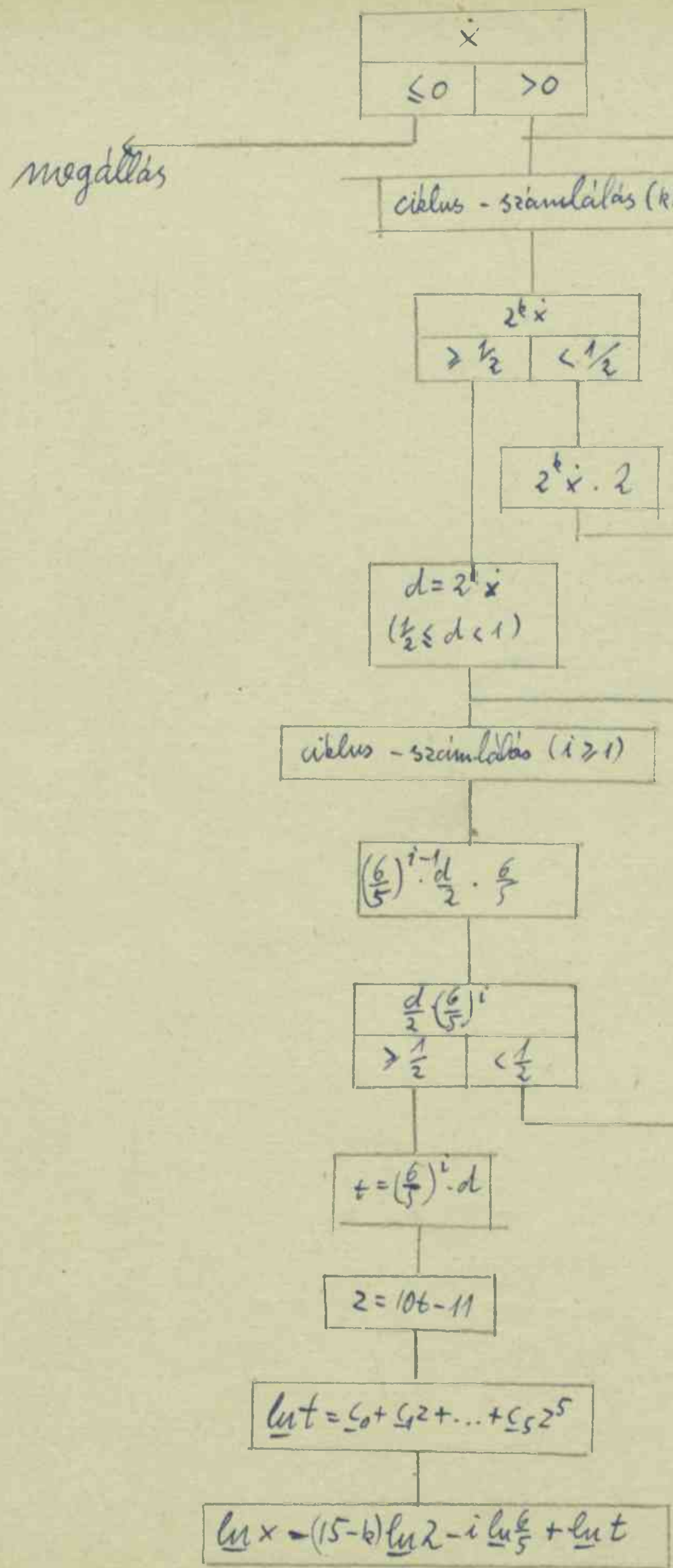
/0115/ = $\underline{c}_0$ = +0,095 310 177 . 2^{-4}

Munkapoziciók:

0116

0117

0120


ẋ
≤0
>0
megállás
ciklus - számlálás (k≥0)
2^k ẋ
≥ 1/2
< 1/2
2^k ẋ · 2
d = 2^k ẋ
(1/2 ≤ d < 1)
ciklus - számlálás (i ≥ 1)
(6/5)^(i-1) · d/2 · 6/5
d/2 (6/5)^i
≥ 1/2
< 1/2
t = (6/5)^i · d
z = 10t - 11
ln t = c0 + c1 z + ... + c5 z^5
ln x = -(15-k) ln 2 - i ln 6/5 + ln t

Készitette: Révész Pálné
Ellenőrizte: Sándor Ferenc

Az y= sinx és y=cosx kiszámitásának szubrutinja.

Az x argumentum változhat $-\infty$ -tól $+\infty$ -ig. A gép kapacitásának teljes kihasználása céljából $x \cdot 2^{-15}$-el számolunk. Ezt azt jelenti, hogy a fix bináris pont a 15-ik helyérték után van elhelyezve. Ekkor $2^{-15} \leq x < 2^{15}$ lehetséges. Ezt a számot ugy redukáljuk, hogy a /0,1/ intervallumba essék, ami a trigonometrikus függvények periodicitása miatt lehetséges. A redukciót több lépésben hajtjuk végre

1./ Képezzük az abszolut értékét, amit megtehetünk, mert cos/-x/= = cosx és sin/-x/=-sinx, tehát a sin /x/ kiszámitása után ha x negativ szám volt ezt ellenkező előjellel kell venni.

2./$|x|$-ből kivonjuk 2π egész számu többszörösét,ugy, hogy $-\pi \leq |x| - 2k\pi \leq \pi$ legyen. Ezt a sinx és cosx 2π szerinti periodicitása miatt tehetjük meg. Igy az argumentum már csak a $(-\pi, \pi)$ intervallumban változhat.

3./ $|x| - 2k\pi = \underline{x}$ jelölést vezetjük be. Képezzük az $|\underline{x}|$-t. sin kiszámitásánál ujból előjel változtatást kell végrehajtani, ha x negativ volt.

4./ Két eset lehetséges:

a./ $|\underline{x}| > \frac{\pi}{2}$

Ekkor képezzük a $\pi - |\underline{x}| = \dot{x}$

Ismerjük a következő összefüggéseket;

sin $(\pi - x) = \sin x$

cos $(\pi - x) = -\cos x$

Ennek alapján, ha ez az eset következik be, akkor cos kiszámitása után az ellenkező előjellel kell venni.

b./ $|\underline{x}| \leq \frac{\pi}{2}$

Ebben az esetben $|\underline{x}| = \dot{x}$ semmi változtatást nem kell végrehajtani.

Ezzel elértük azt, hogy $0 \leq \dot{x} \leq \frac{\pi}{2}$ teljesül, tehát az argumentumot ugy redukáltuk, hogy az első térnegyedbe essék.

Ezzel még nem teljesitettük azt a kikötést, hogy az argumentum a /0,1/ intervallumban változzék. E célból felhasználjuk a következő képleteket:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$$

Igy $0 \le \frac{x}{2} \le \frac{\pi}{4} < 1$, tehát ez a feltétel is teljesitve van. $\sin\frac{x}{2}$ és $\cos\frac{x}{2}$ sorfejtéssel számitható ki. Belátható, hogy a sorfejtésnél elég elmenni a tizenharmadfoku tagig, mivel a többi tagok összege már 10^{-11} nagyságrendü, tehát nem ad javitást az eredményhez. Ezzel a feladat két legfeljebb 13-ad foku polinom kiszámitására redukálódott, amely számitás a Horner-elrendezés segitségével könnyen végrehajtható.

cos x és sin x kifejezésére a következő képletek adódnak:

$$\sin x \approx \frac{x^{13}}{13!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^3}{3!} + x$$

$$\cos x \approx \frac{x^{12}}{12!} - \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^2}{2!} + 1$$

Program

pozició	kód	jel	1.cim	2. cim	Megjegyzés
0001	50	$\|+\|_{,}$	0100	0000	
0002	20	$\downarrow +$	0000	0107	$\rightarrow \|x\|$
0003	01	$-$	0101	0107	
0004	34	$Y\pi$	0005	0003	
0005	51	$\|-\|_{,}$	0107	0102	$\|x\| - 2k\pi$ képzése
0006	34	$Y\pi$	0007	0010	
0007	00	$+$	0101	0107	$\rightarrow \underline{x}$
0010	70	$\downarrow \|+\|_{,}$	0000	7777	
0011	20	$\downarrow +$	0000	0110	$\rightarrow \|\dot{x}\|$
0012	11	$-_{,}$	0110	0104	
0013	34	$Y\pi$	0014	0016	
0014	11	$-_{,}$	0110	0102	$\dot{x}$ képzése
0015	20	$\downarrow +$	0000	0110	
0016	02	$:$	0103	0110	
0017	13	$\times_{,}$	0110	0110	
0020	20	$\downarrow +$	0000	0111	sin $\frac{\dot{x}}{2}$ képzése
0021	05	π_{h}	0150	0112	
0022	13	$\times_{,}$	0111	0112	
0023	20	$\downarrow +$	0151	0112	
0024	00	$+$	0066	0023	
0025	51	$\|-\|_{,}$	0023	0067	
0026	34	$Y\pi$	0027	0022	
0027	13	$\times_{,}$	0111	0110	
0030	33	$\downarrow \times_{,}$	0112	7777	
0031	20	$\downarrow +$	0110	0112	$\rightarrow$ sin $\frac{\dot{x}}{2}$
0032	10	$+_{,}$	0160	0113	
0033	23	$\downarrow \times$	0111	0113	

0034	00	+	0066	0032	
0035	51	|-|,	0032	0070	cos $\frac{\dot{x}}{2}$ képzése
0036	34	Yπ	0037	0032	
0037	13	×,	0113	0105	
0040	30	↓+,	0105	7777	
0041	22	↓:	0105	0113	→ cos $\frac{\dot{x}}{2}$
0042	13	×,	0113	0112	
0043	22	↓:	0105	0114	→ sin $\dot{x}$
0044	10	+,	0107	0000	
0045	34	Yπ	0046	0050	
0046	11	−,	0114	0000	
0047	20	↓+	0000	0114	sin $\underline{x}$
0050	10	+,	0100	0000	
0051	34	Yπ	0052	0054	
0052	11	−,	0114	0000	
0053	20	↓+	0000	0114	→ sin x
0054	40	+π	0000	0114	
0055	03	×	0113	0113	
0056	03	×	0112	0112	
0057	01	−	0112	0113	→ cos $\dot{x}$
0060	51	|-|,	0104	0107	
0061	34	Yπ	0064	0062	
0062	11	−,	0113	0000	
0063	20	↓+	0000	0113	
0064	40	+π	0000	0113	→ cos x
0065	24	πY	0071	7777	
0066	00	+	0001	0000	
0067	20	↓+	0155	0112	
0070	10	+,	0165	0113	Pseudo utasitások
0071	..	..	....	....	

Konstansok

/0100/= $x \cdot 2^{-15}$

/0101/= $2\pi \cdot 2^{-15}$

/0102/= $\pi \cdot 2^{-15}$

/0103/= 2^{-14}

/0104/= $\frac{\pi}{2} \cdot 2^{-15}$

/0105/=+ 40 000 000

/0113/= 0

/0000/= 0

sin x együtthatói

/0150/= $\frac{1}{13!}$

/0151/= $-\frac{1}{11!}$

/0152/= $\frac{1}{9!}$

/0153/= $-\frac{1}{7!}$

/0154/= $\frac{1}{5!}$

/0155/= $-\frac{1}{3!}$

cos x együtthatói

/0160/= $\frac{1}{12!}$

/0161/= $-\frac{1}{10!}$

/0162/= $\frac{1}{8!}$

/0163/= $-\frac{1}{6!}$

/0164/= $\frac{1}{4!}$

/0165/= $-\frac{1}{2!}$

Munkapoziciók

/0107/

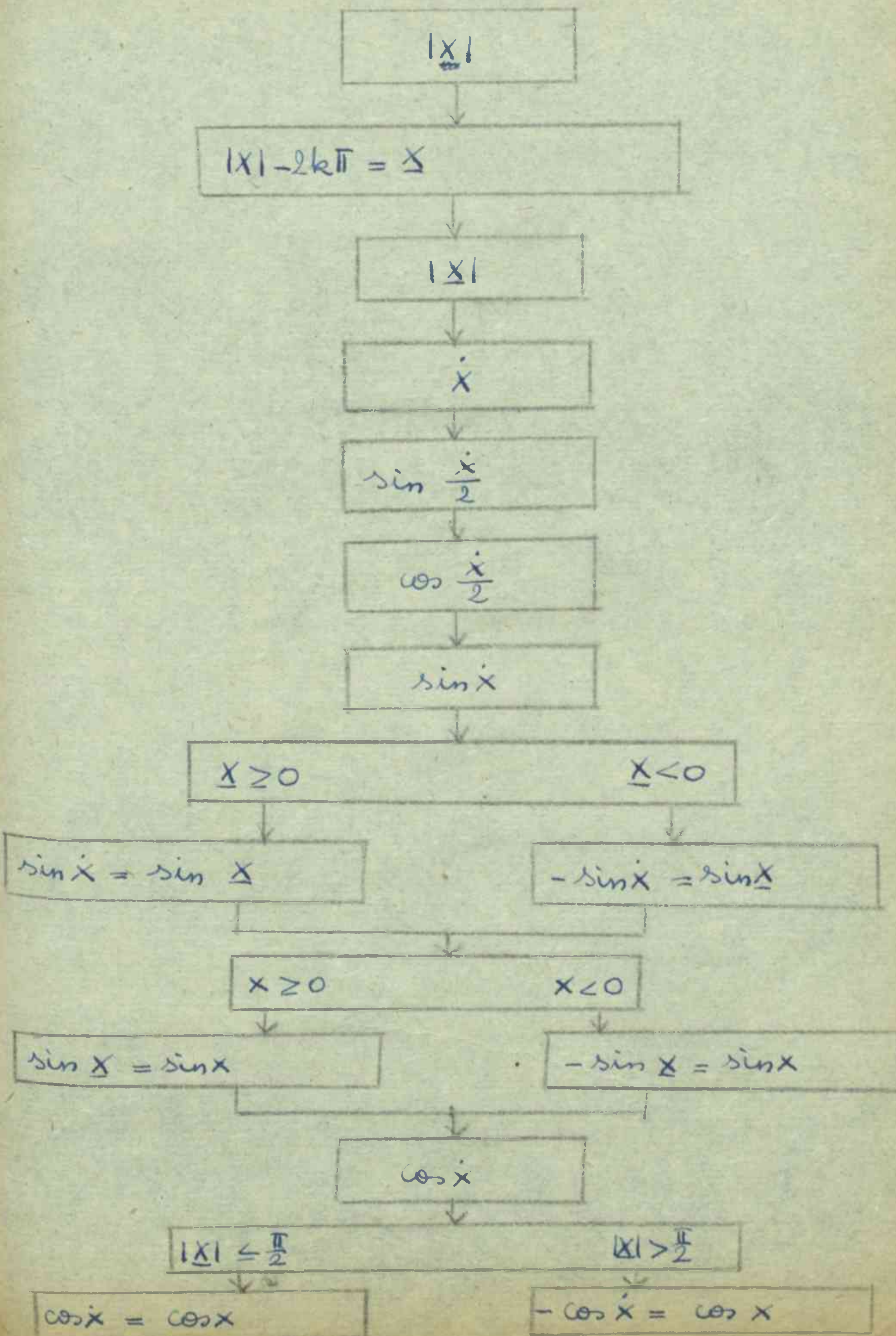
/0110/

/0111/

/0102/

/0114/

Menetrend


$|\underline{x}|$
$|x| - 2k\pi = \underline{x}$
$|\underline{x}|$
$\dot{x}$
$\sin \frac{\dot{x}}{2}$
$\cos \frac{\dot{x}}{2}$
$\sin \dot{x}$
$\underline{x} \geq 0$
$\underline{x} < 0$
$\sin \dot{x} = \sin \underline{x}$
$-\sin \dot{x} = \sin \underline{x}$
$x \geq 0$
$x < 0$
$\sin \underline{x} = \sin x$
$-\sin \underline{x} = \sin x$
$\cos \dot{x}$
$|\underline{x}| \leq \frac{\pi}{2}$
$|\underline{x}| > \frac{\pi}{2}$
$\cos \dot{x} = \cos x$
$-\cos \dot{x} = \cos x$

Tg x, ctg x kiszámitásának szubrutinja.

Készitette : Szelezsán János
Ellenőrizte: Sándor Ferenc.

Tgx és ctgx szubrutinjánál felhasználjuk sin x és cos x szubrutinját, lévén tg x= $\frac{\sin x}{\cos x}$ illetve ctg x= $\frac{\cos x}{\sin x}$.

Mivel mind tg x, mind ctg x egynél nagyobb is lehet, ezért

$$2^{-15} tgx = \frac{2^{-15}\sin x}{\cos x}$$ -et

illetve:

$$2^{-15} ctgx = \frac{2^{-15}\cos x}{\sin x}$$ -et számitjuk ki.

Programm:

Tegyük, fel, hogy sin x és cos együttes szubrutinjában az utasitások az α -tól $\alpha+k-1$-ig terjedő memória-poziciókban vannak, az argumentum helye legyen β, legyen ezenkivül sin x kiszámitott értékének memóriapoziciója ν cos x-é μ.

Az agrumentum: /0140/= $x2^{-15}$

Konstansok: /0141/=2^{-15}

/0142/= $\Pi\gamma$ 0123 7777

	kód	jel	1.cim	2.cim	Megjegyzés
0120	05	$\Pi\alpha$	0140	β	
0121	05	$\Pi\alpha$	0142	$\alpha+k$	
0122	24	$\Pi\gamma$	α	7777	
0123	13	x,	0141	ν	2^{-15} sin x
0124	20	$\downarrow$+	0000	0126	
0125	02	:	μ.	0126	2^{-15} tg x
0126	13	x,	0141	μ	2^{-15} cos x
0127	20	$\downarrow$+	0000	0127	
0130	02	:	ν	0127	2^{-15} ctg x
0131	...		...	...	

Készitette: Szelezsán János
Ellenörizte: Sándor Ferenc

Arc sin x, arc cos x, arc tg x, arc ctg x kiszámitásának szubrutinja

Készitette: Szelezsán János
Ellenörizte: Sándor Ferenc

I. Arc sin x, arc cos x. /főérték/

Felhasználjuk az :

/1/ $$\arcsin x = \frac{\pi}{4}\left\{\operatorname{sign} y_1 + \frac{1}{2}\operatorname{sign}(y_1 y_2) + \dots + \frac{1}{2^{k-1}}\operatorname{sign}(y_1 \cdots y_k) + \dots\right\}$$

sorfejtést, ahol:

$$y_1 = x$$
$$y_{k+1} = 2y_k^2 - 1$$

/Lásd: Besm $\arcsin x$ programja. A sorfejtés arc sin x-et lépcsős függvényként állitja elő/

Szoritkozzunk:

$|x| \leq 1 - 2^{-30}$ -ra, ez nem jelent lényeges megszoritást, mert $|x| = |\sin y| \leq 1$

A gép kapacitását figyelembevéve, elegendő a sorfejtésben annyi tagig elmenni, hogy még

/2/ $$\left|\frac{\pi}{4}\frac{1}{2^{k-1}}\right| \geq 2^{-31}$$

legyen; az ennél kisebb értékü tagokat a gép már nem tudja figyelembe venni s az ezen tag utáni maradékösszeget sem, mivel az összegezés szukcesszive történik. A /2/-ből: $k \leq 31$ -et kapunk. / A maradékösszeg egyébként $k > 31$-től szintén kisebb mint 2^{-31} lévén:

$$|\arcsin x - S_k| = \left|\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2^k}\operatorname{sig} y_1 \cdots y_{k+1} + \dots\right)\right| \leq$$
$$\leq \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \dots\right) = \frac{\pi}{4}\frac{1}{2^{k-1}}$$

Mivel $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$ ezért arc sin x egynél nagyobb értéket is felvehet. Vegyünk ezért arc sin x helyett 10^{-1} arc sin x-et, azaz /1./-ben $\frac{\pi}{4}$ helyett $\frac{\pi}{4} \cdot 10^{-1}$-et.

Arc sin /-x/= -arc sin x lévén, negativ argumentummal is könnyen számolhatunk. Mivel arc cos x$=\frac{\pi}{2}-$ arc sin x /főértéket véve/, ezért arc sin x szubrutinját egy lépéssel folytatva nyerjük arc cos x-et, illetve mert ez egynél nagyobb is lehet

$[0 \le \arccos x \le \pi]$ ezért 10^{-1} arc cos x-et veszünk.:

$$10^{-1}\arccos x = \frac{\pi}{2}10^{-1} - 10^{-1}\arcsin x.$$

Program

Az argumentum helye: /0032/=x

Konstansok: /0000/=0000 /0034/= $\frac{1}{2}$

/0033/= $\frac{\pi}{4}10^{-1}$

Munkapozíciók: 0037

0040

0041

	kód		1.cím	2.cím	Megjegyzés
0001	05	$\pi\tau$	0033	0040	
0002	05	$\pi\tau$	0033	0041	
0003	05	$\pi\tau$	0032	0037	
0004	03	$\times$	0034	0041	$\longrightarrow \frac{1}{2}\frac{\pi}{4}10^{-1}$
0005	03	$\times$	0032	0032	$\longrightarrow y_k^2$
0006	01	$-$	0034	0032	$\longrightarrow \frac{1}{2}y_{k+1} = y_k^2 - \frac{1}{2}$
0007	34	$\veebar\pi$	0010	0012	
0010	11	$-,$	0041	0040	
0011	24	π_y	0013	0040	
0012	00	$+$	0041	0040	$[\frac{\pi}{4} \pm \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} \pm \dots]10^{-1} = 10^{-1}\arcsin x$
0013	02	$:$	0034	0032	
0014	51	$\|-\|,$	0041	0000	
0015	34	$\veebar\pi$	0004	0016	
0016	10	$+,$	0037	0000	
0017	34	$\veebar\pi$	0020	0022	
0020	11	$-,$	0040	0000	
0021	20	$\downarrow+$	0000	0040	arc sin x
0022	12	$:,$	0034	0033	
0023	21	$\downarrow-$	0040	0041	arc cos x
0024	...				

II. Arc.tg x. arc cotg x.

Felhasználjuk a

$$2/\ \text{arc tg}\ x = \text{arc sin}\ \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$3/\ \text{arc cotg}\ x = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$ összefüggéseket.

Mind az arc tg x, mind az arc cotg x értelmezési tartománya $-\infty \leq x \leq +\infty$, a gép kapacitása miatt szorítkozunk $|x| < 2^{15}$-re. Vegyünk tehát minden x argumentum helyett $x.2^{-15}$-öt. Igy

$$\text{arctg}\,x = \text{arcsin}\ \frac{x.2^{-15}}{\sqrt{2^{-30} + x^2 2^{-30}}},$$ illetve

$$\text{arccotg}\,x = \arccos \frac{x.2^{-15}}{\sqrt{2^{-30} + x^2 2^{-30}}}.$$

Mivel mind arc tg x, mind arc cotg x értékkészlete túllépi az egységet, ezért

$$10^{-1}\text{arctg}\,x = 10^{-1}\text{arcsin}\ \frac{x\,2^{-15}}{\sqrt{2^{-30}+x^2 2^{-30}}}$$

$$10^{-1}\text{arccotg}\,x = 10^{-1}\arccos \frac{x\,2^{-15}}{\sqrt{2^{-30}+x^2 2^{-30}}}$$ -at

számitjuk ki.

Program

A $\sqrt{\ }$ szubrutin legyen elhelyezve, az α-tól $\alpha+k-1$-ig terjedő pozíciókban és legyen a $\sqrt{\ }$ szubrutinban az argumentum helye a δ pozíció, s a gyökvonás eredményének pozíciója: β.

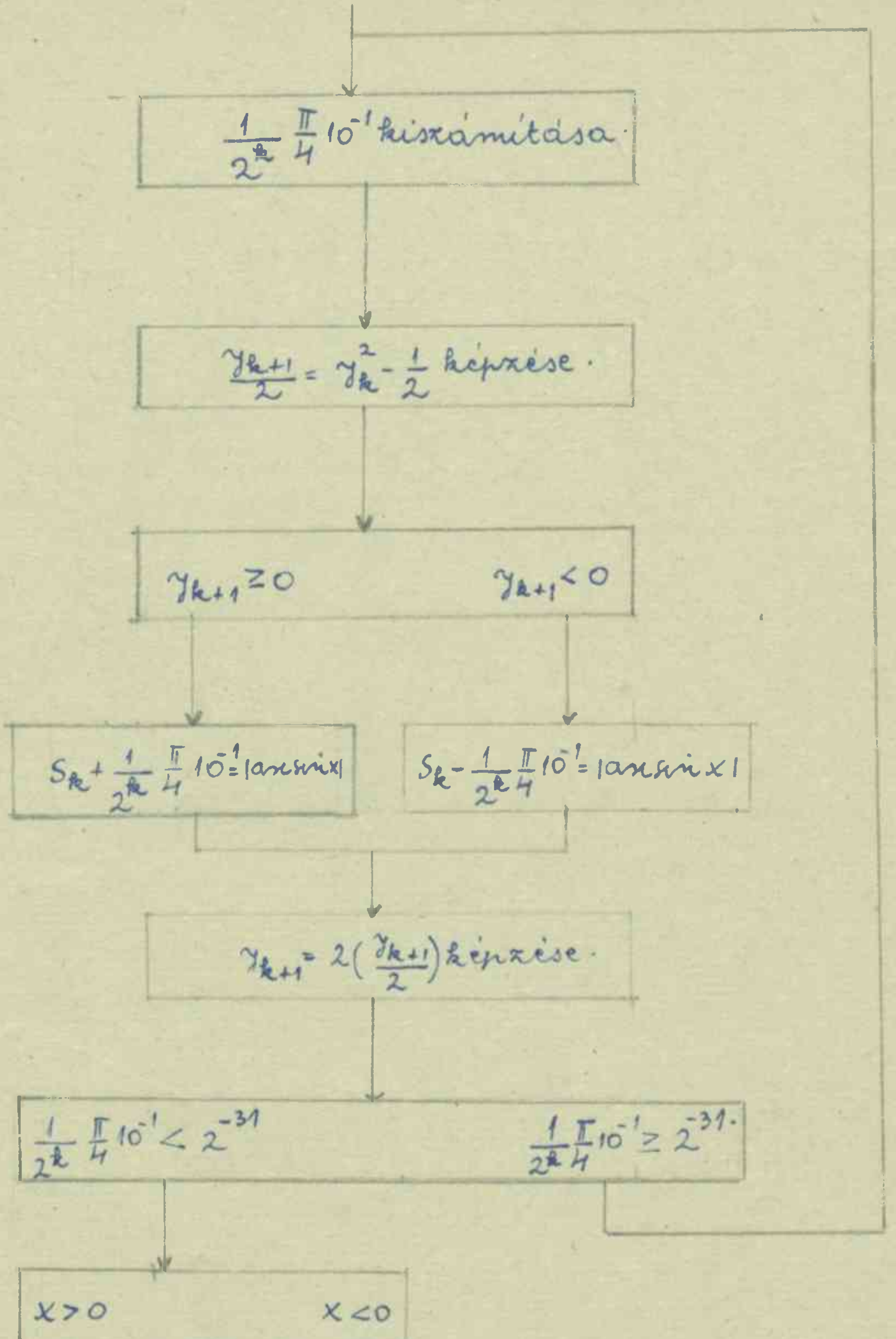
Az argumentum: /0046/= $x.2^{-15} = u$

Konstansok: /0044/= 24 0054 7777

/0045/= 2^{-30}

0050	05	Tr	0044	$\alpha+k$.	
0051	13	x,	0046	0046	$\rightarrow u^2$
0052	30	↓+,	0045	~~7777~~	$\rightarrow u^2+2^{-30}$
0053	24	Ty	x	δ	
0054	02	:	β	0046	$\longrightarrow \frac{x2^{-15}}{\sqrt{2^{-30}+x^2 2^{-30}}} = v$.
0055	24	Ty	0001	0032	áttérés arc sin és arc cos kiszámitására. amely éppen arctg x ill. arccotg x.

Menetrend.



$\frac{1}{2^k}\frac{\pi}{4}10^{-1}$ kiszámítása.
$\frac{y_{k+1}}{2} = y_k^2 - \frac{1}{2}$ képzése.
$y_{k+1} \geq 0$
$y_{k+1} < 0$
$S_k + \frac{1}{2^k}\frac{\pi}{4}10^{-1} = |\arcsin x|$
$S_k - \frac{1}{2^k}\frac{\pi}{4}10^{-1} = |\arcsin x|$
$y_{k+1} = 2\left(\frac{y_{k+1}}{2}\right)$ képzése.
$\frac{1}{2^k}\frac{\pi}{4}10^{-1} < 2^{-31}$
$\frac{1}{2^k}\frac{\pi}{4}10^{-1} \geq 2^{-31}$.
$x > 0$
$x < 0$
$-|\arcsin x|$.
$\frac{\pi}{2} - \arcsin x = \arccos x$.

Készitette: Révész Pálné
Ellenőrizte: Sándor Ferenc

Szubrutin az $\int_a^b f(x)\,dx$ kiszámitására monoton korlátos $f(x)$ függvények esetén.

Az $\int_a^b f(x)\,dx$ -et a Simpson szabály segitségével számitjuk ki.

Az $[a,b]$ intervallumot felosztjuk n egyenlő részre.

$$h=\frac{b-a}{n}$$

Az $\int_a^b f(x)\,dx$ -et ekkor n darab integrál összegére bonthatjuk.

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^{a+h} f(x)\,dx+\int_{a+h}^{a+2h} f(x)\,dx+\dots+\int_{b-h}^{b} f(x)\,dx$$

Az $\int_{a+(k-1)h}^{a+kh} f(x)\,dx$ értéke pedig a Simpson szabállyal számitható ki a következő formula szerint:

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x)\,dx=\frac{h}{6}\left[f(x_i)+4f\left(x_i+\frac{h}{2}\right)+f(x_i+h)\right]$$

A számitás pontossága a lépések számától, azaz n-től függ. A szükséges pontosságot a következőképen érjük el.

Az integrál közelitő értékét egymás után fele akkora lépésközökkel számitjuk ki. Az eljárást akkor fejezzük be, ha az utolsó két kiszámitott közelitő érték különbsége a gép számára nullát ad /kisebb mint 2^{-31}/. Az igy kapott utolsó közelitő értéket vesszük az integrál közelitő értékének.

Feltesszük, hogy $-1<a<b<1$ és $0\le f(x)\le \frac{1}{2}$.

mivel

$$\frac{h}{6}\left[f(x_i)+4f\left(x_i+\frac{h}{2}\right)+f(x_i+h)\right]\le(b-a)\max\left[f(a),f(b)\right]$$

ekkor

$$(b-a)\max\left[f(a),f(b)\right]<2\cdot\frac{1}{2}=1$$

Ezek a feltevések nem adnak lényeges megszoritást, mivel az integrált mindig transzformálhatjuk ugy, hogy ezek a feltevések teljesüljenek.

Programm

0001	$-)$	11	0100	0101	$\to h$
0002	$\downarrow +$	20	0000	0113	
0003	$\times,$	13	0102	0113	$\to \frac{h}{2}$
0004	$\downarrow +$	20	0000	0114	
0005	$+,$	10	0100	0000	az első argumentum β-be kerül
0006	$\downarrow +$	20	0000	β	
0007	$+,$	10	0104	0000	a szubrutin utolsó utasításának módositása és ugrás a szubrutinra
0010	ΠY	24	α	$\alpha + k$	
0011	Π_z	05	γ	0122	$f(a), f(a+\frac{h}{2}), f(a+h)$ kiszámitása
0012	$+$	00	0114	β	
0013	$+$	00	0121	0011	
0014	$-)$	11	0011	0110	
0015	$Y\Pi$	34	0016	0010	
0016	$-$	01	0114	β	$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x)\,dx$ kiszámitása
0017	$\times,$	13	0103	0113	
0020	$\downarrow +$	20	0000	0115	
0021	$\downarrow :$	22	0111	0116	
0022	$\times,$	13	0122	0115	
0023	$\downarrow +$	20	0125	0125	
0024	$\times,$	13	0116	0123	
0025	$\downarrow +$	20	0125	0125	
0026	$\times,$	13	0115	0124	
0027	$\downarrow +$	20	0125	0125	
0030	$-$	01	0112	0011	
0031	$-)$	11	0101	β	elérte-e az intervallum végét. Ha nem, akkor ugrik.
0032	$Y\Pi$	34	0007	0033	
0033	Π_z	05	0114	0113	

0034	11	0117	0125	Ha még nem elég jó a közelités, ujra számolja $\frac{h}{2}$ -el.
0035	20	0000	0120	
0036	05	0125	0117	
0037	51	0120	0000	
0040	34	0003	0041	
0041	05	0125	0126	
0042	05	0000	0117	
0043	05	0000	0125	
0044	. . . .			

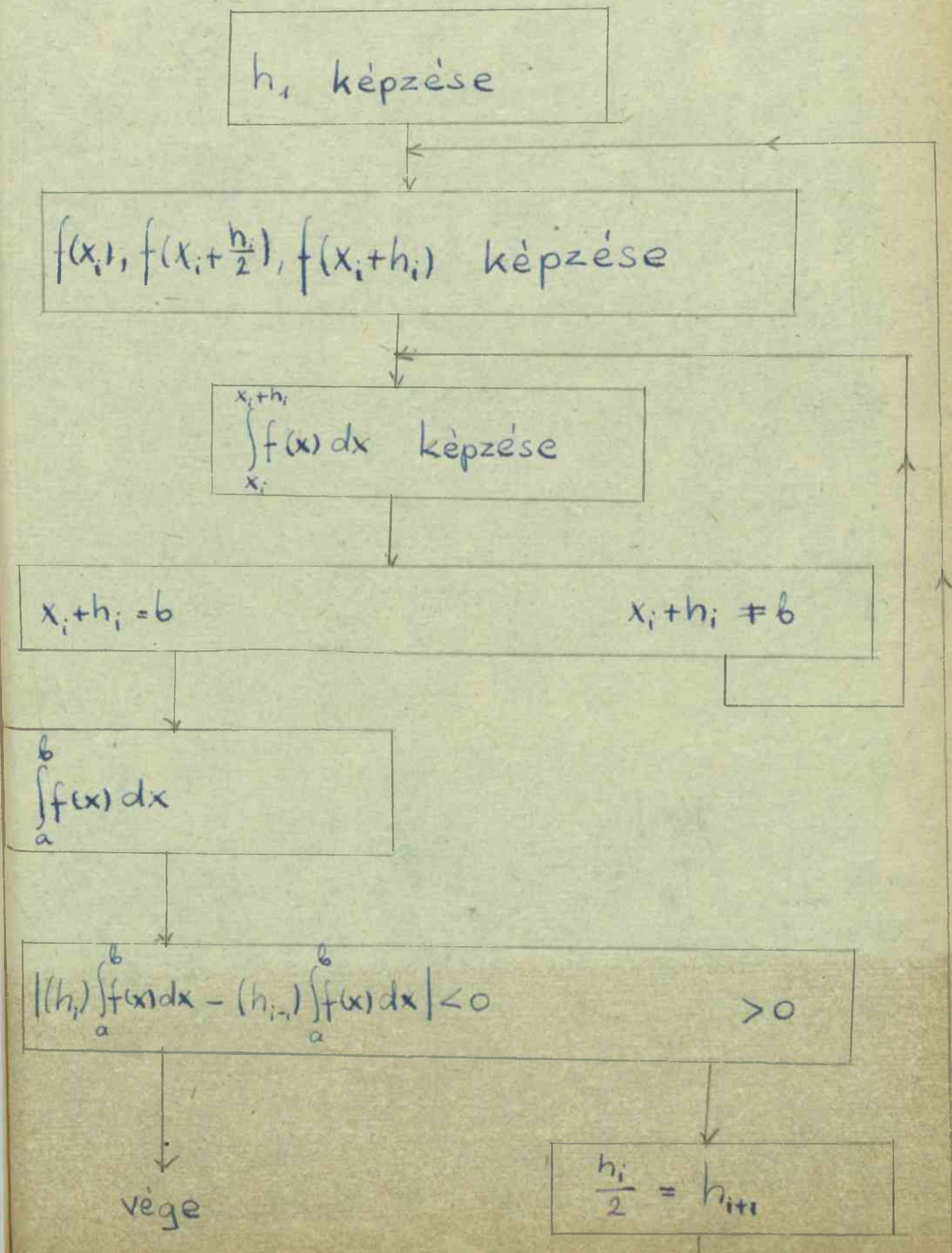
Konstansok

/0100/= a	/0101/= b		
/0102/=+40	0000	0000	=0,5
/0103/= $\frac{1}{6}$	/0000/=0		
/0104/=+24	0011	7777	
/0110/=+05	γ	0124	
/0111/=+20	0000	0000	= $\frac{1}{4}$
/0112/=+00	0000	0003	
/0117/=+00	0000	0000	
/0121/=+00	00000	0001	$=2^{-30}$
/			

Munkapoziciák:

0113	α = $\int_a^{a}$ f(x)-et előállitó szubrutin első utasitásának memóriapoziciója.
0114	
0115	$\alpha+b$ = $\int_a^{a}$ f(x)-et előállitó szubrutin utolsó utasitásának memóriapoziciója.
0116	
0122	β = a szubrutin folyamán az $\int$ f(x) argumentumának memóriapoziciója.
0123	
0124	γ = a szubrutin működése folyamán ide kerül a kiszámitott f(x)
0125	
0120	

Menetrend


h_1 képzése
$f(x_i), f(x_i+\frac{h_i}{2}), f(x_i+h_i)$ képzése
$\int_{x_i}^{x_i+h_i} f(x)\,dx$ képzése
$x_i+h_i=b$
$x_i+h_i \neq b$
$\int_a^b f(x)\,dx$
$\left|(h_i)\int_a^b f(x)dx-(h_{i-1})\int_a^b f(x)dx\right|<0$
>0
vége
$\frac{h_i}{2}=h_{i+1}$

Készitette: Révész Pálné

Ellenőrizte: Sándor Ferenc

Értelmező szubrutin komplex számokkal való számoláshoz.

A komplex számokat a memóriában ugy helyezzük el, hogy a valós részt mindig páros számu pozicióba tesszük, a képzetes részt pedig a rákövetkező páratlan számuba. Mivel a gép fixbináris pontu, csak olyan a+ib alaku komplex számokkal számolhatunk, ahol $|a+ib|<1$

B regiszternek a 0600 és 0601-es munkapoziciókat használjuk. Az eredmény mindig ide kerül és nyilatlan müvelet esetén ideirjuk a második cim tartalmát.

Ebben a szubrutinban értelmezzük az aritmetikai müveleteket és a 24 és 34 kódjelü ugró utasitást. A 34.-es kódjelü ugró utasitást ugy értelmezzük, hogy a gép aszerint ugrik az első vagy második cimre, hogy az eredményének valós része pozitiv vagy negativ volt-e? A gép a szubrutinból akkor és csak akkor ugrik ki, ha a 64 vagy 74-es kódjelü ugró utasitást talál.

A szubrutin behívása a következőképpen történik:

Vezérprogram

.

.

.

r-2	05	ΠЧ	α	0002	behívó utasitások
r-1	24	ΠУ	0002	7777	
r					értelmezendő utasitások
r+1					
.					
.					
(α) =	05	ΠЧ	r	0001	

Program

Pozíciósz.	kód	jel	1.cim	2.cim	Megjegyzés
0001	(			)	Értelmezendő utasitás helye
0002	(			)	→ Az értelmezendő utasitás bevitele
0003	00	+	0170	0002	
0004	16	∧,	0001	0171	
0005	31	↓−,	0172	7777	Ha nem kell az utasitást értelmezni, akkor végrehajtja.
0006	34	YΠ	0007	0001	
0007	30	↓+,	0173	7777	
0010	34	YΠ	0031	0011	
0011	11	−,	0205	0001	
0012	34	YΠ	0013	0001	
0013	20	↓+	0201	0214	
0014	34	YΠ	0001	0015	
0015	06	∧	0207	0002	
0016	11	−,	0175	0214	
0017	34	YΠ	0022	0020	
0020	10	+,	0000	0600	Ugró utasitások értelmezése
0021	34	YΠ	0022	0025	
0022	16	∧,	0176	0001	
0023	20	↓+	0002	0002	
0024	24	ΠY	0002	7777	
0025	16	∧,	0177	0001	
0026	32	↓:,	0200	7777	
0027	20	↓+	0002	0002	
0030	24	ΠY	0002	7777	
0031	16	∧,	0174	0001	
0032	20	↓+	0000	0214	→ Müveleti jel első számjegye
0033	31	↓−,	0201	7777	
0034	34	YΠ	0041	0035	
0035	31	↓−,	0201	7777	Nyilas vagy nyilatlan müvelet
0036	34	YΠ	0047	0037	
0037	31	↓−,	0201	7777	
0040	34	YΠ	0041	0047	

Pozicziószám	kód	jel	1.cim	2.cim	Megjegyzés
0041	16	∧,	0177	0001	
0042	32	↓:,	0200	7777	
0043	20	↓+	0210	0045	Második cim tartalmának
0044	20	↓+	0202	0046	beirása a 0600 és 0601-be
0045	(			)	
0046	(			)	
0047	16	∧,	0176	0001	
0050	20	↓+	0211	0052	
0051	20	↓+	0202	0053	Első cim tartalmának be-
0052	(			)	irása a 0602 és 0603-ba
0053	(			)	
0054	15	∧,	0214	0175	
0055	31	↓−)	0175	7777	
0056	34	YΠ	0104	0057	Abszolut értékes müvelet-e?
0057	11	−)	0205	0214	
0060	34	YΠ	0104	0061	
0061	03	×	0600	0600	
0062	03	×	0601	0601	
0063	00	+	0601	0600	
0064	05	Π4	0600	α	
0065	05	Π4	0203	β+k	
0066	24	ΠY	β	7777	
0067	05	Π4	δ	0600	
0070	03	×	0602	0602	
0071	03	×	0603	0603	
0072	00	+	0603	0602	
0073	05	Π4	0602	α	Ha abszolut értékes müvelet,
0074	05	Π4	0204	β+k	akkor képezi a két szám
0075	24	ΠY	β	7777	abszolut értékét és elvég-
0076	05	Π4	δ	0602	zi a kijelölt müveletet.
0077	16	∧,	0171	0001	
0100	20	↓+	0212	0101	
0101	(			)	
0102	05	Π4	0000	0601	
0103	24	ΠY	0002	7777	

Pozíciószám	kód	jel	1.cim	2.cim	Megjegyzés
olo4	o5	ПЧ	o213	ollo	
olo5	16	Λ,	o171	oool	Milyen müvelet?
olo6	33	↓×,	o2oo	7777	
olo7	2o	↓+	ollo	ollo	
ollo	(			)	
olll	24	ПУ	oll5	7777	→ Összeadás
oll2	24	ПУ	ol2o	7777	→ Kivonás
oll3	24	ПУ	ol34	7777	→ Osztás
oll4	24	ПУ	ol23	7777	→ Szorzás
oll5	oo	+	o6o2	o6oo	
oll6	oo	+	o6o3	o6ol	Összeadás
oll7	24	ПУ	ol51	7777	
ol2o	ol	−	o6o2	o6oo	
ol21	ol	−	o6o3	o6ol	Kivonás
ol22	24	ПУ	ol51	7777	
ol23	13	×,	o6ol	o6o3	
ol24	2o	↓+	oooo	o215	
ol25	13	×,	o6oo	o6o2	
ol26	21	↓−	o215	o215	
ol27	o3	×	o6o3	o6oo	Szorzás
ol3o	13	×,	o6o2	o6ol	
ol31	2o	↓+	o6oo	o6ol	
ol32	o5	ПЧ	o215	o6oo	
ol33	24	ПУ	ol51	7777	
ol34	13	×,	o6oo	o6o2	
ol35	2o	↓+	oooo	o215	
ol36	13	×,	o6ol	o6o3	
ol37	2o	↓+	o215	o215	
ol4o	o3	×	o6o3	o6oo	
ol41	13	×,	o6o2	o6ol	
ol42	21	↓−	o6oo	o6ol	Osztás
ol43	o3	×	o6o2	o6o2	
ol44	13	×,	o6o3	o6o3	
ol45	2o	↓+	o6o2	o6o3	
ol46	12	:,	o6o3	o215	
ol47	2o	↓+	oooo	o6oo	
ol5o	o2	:	o6o3	o6ol	

Pozicíószám 8	kód	jel	1.cim	2.cim	Megjegyzés
o151	16	∧,	o175	ooo1	
o152	31	↓→	o175	7777	
o153	34	Y⊓	o154	ooo2	Ha vesszőtlen müvelet, akkor az eredmény beirása a második cimrő
o154	16	∧,	o177	ooo1	
o155	2o	↓+	o2o6	o156	
o156	(			)	
o157	o5	⊓Y	o156	o161	
o16o	oo	+	o2o2	o161	
o161	(			)	
o162	11	→	o2o5	o214	
o163	34	Y⊓	ooo2	o164	
o164	4o	+⊓	oooo	o6oo	Kinyomtatás
o165	4o	+⊓	oooo	o6o1	
o166	24	⊓Y	ooo2	7777	

Konstansok

/o17o/=+oo	ooo1	oooo
/o171/=+o7	oooo	oooo
/o172/=+o5	oooo	oooo
/o173/=+o1	oooo	oooo
/o174/=+7o	oooo	oooo
/o175/=+1o	oooo	oooo
/o176/=+oo	7777	oooo
/o177/=+oo	oooo	7777
/o2oo/=+oo	o1oo	oooo=2^{-12}
/o2o1/=+2o	oooo	oooo
/o2o2/=+oo	ooo1	ooo1
/o2o3/=+24	oo67	7777
/o2o4/=+24	oo76	7777
/o2o5/=+40	oooo	oooo= $\frac{1}{2}$
/o2o6/=+o5	o6oo	oooo
/o2o7/=+77	oooo	7777
/o21o/=+o5	oooo	o6oo
/o211/=+o5	oooo	o6o2
/o212/=+oo	o6o2	o6oo
/o213/=+24	o11o	7777
/oooo/=+oo	oooo	oooo

Munkapoziciók

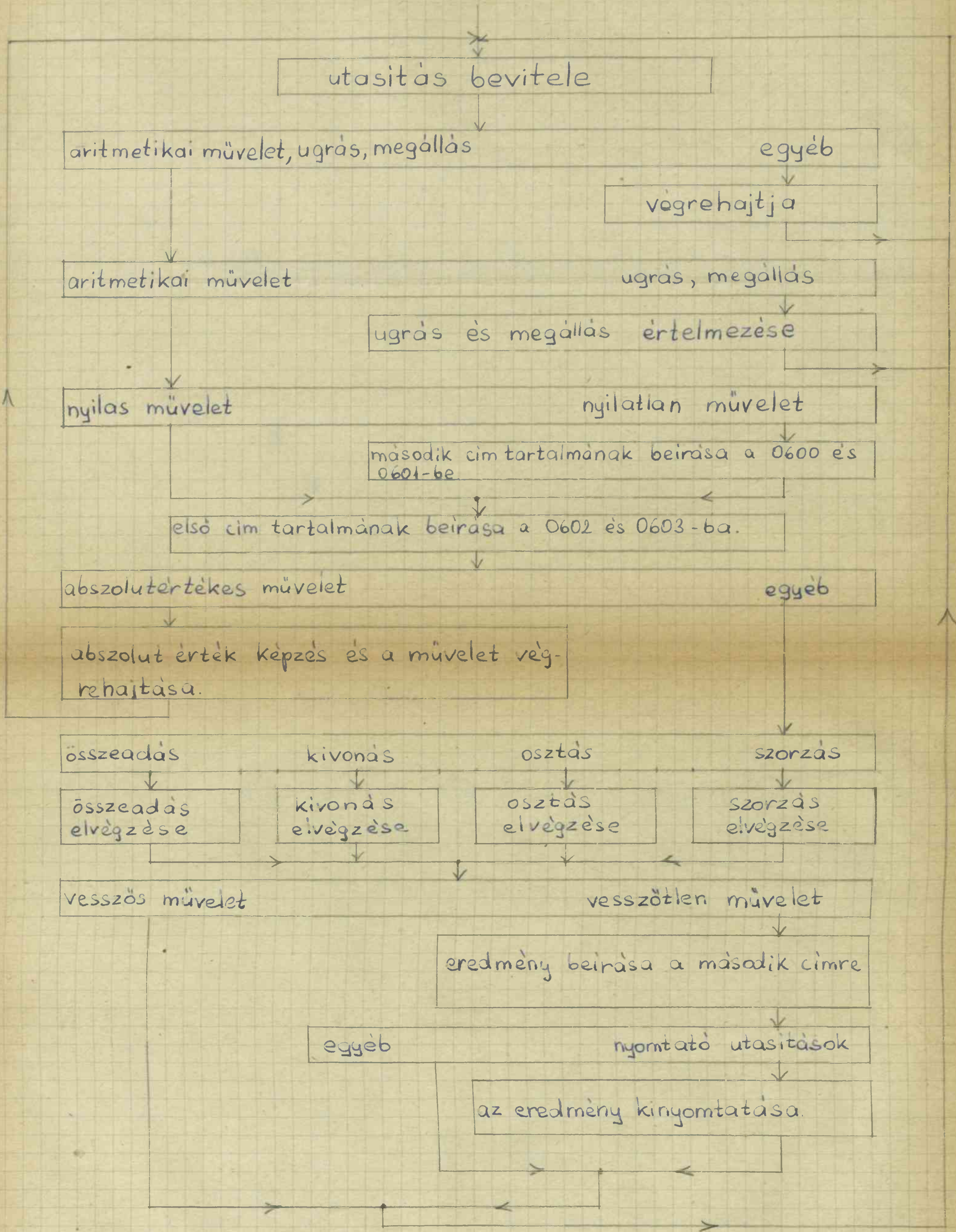
o214 α : A gyökvonó szubrutinban az argumentum helye

o215 β : A gyökvonó szubrutin kezdetének memóriapoziciója.

$\beta+k$: A gyökvonó szubrutin végének memóriapoziciója

A gyökvonó szubrutinban ide kerül a végeredmény

MENETREND


utasitás bevitele
aritmetikai müvelet, ugrás, megállás
egyéb
végrehajtja
aritmetikai müvelet
ugrás, megállás
ugrás és megállás értelmezése
nyilas müvelet
nyilatlan müvelet
második cim tartalmának beirása a 0600 és 0601-be
első cim tartalmának beirása a 0602 és 0603-ba.
abszolutértékes müvelet
egyéb
abszolut érték képzés és a müvelet végrehajtása.
összeadás
kivonás
osztás
szorzás
összeadás elvégzése
kivonás elvégzése
osztás elvégzése
szorzás elvégzése
vesszős müvelet
vesszőtlen müvelet
eredmény beirása a második cimre
egyéb
nyomtató utasitások
az eredmény kinyomtatása.

Készitette: Révész Pálné
Ellenőrizte: Sándor Ferenc

Értelmező szubrutin lebegő ponttal való számoláshoz.

A számokat $d.2^q$ alakban ábrázoljuk, ahol $\frac{1}{2} \leq d < 1$
Egy szám a memóriában két poziciót foglal el. A mantissza /d/ mindig egy páros számu pozicióban van, a kitevő /q/ pedig a rákövetkező páratlan számu pozicióban. A q kitevő, amely mindig egész szám $q.2^{-30}$ alakban szerepel, azaz a memóriapozició jobbszélén helyezkedik el.

A B regiszter szerepét a 0500 és 0501-es memóriapozició játsza. Ide kerül nyilatlan müvelet esetén a második cim tartalma és mindig ide iródik be a végeredmény. Nyilas müvetelnél tehát ezt ujra fel lehet használni, ugyanugy, mint a fixpontos müködésnél.

A gép a szubrutinból akkor és csak akkor ugrik ki, ha ugró utasitást kap. Minden ugró utasitás után tehát, ha tovább is lebegő ponttal dolgozunk, ujra be kell hivni ezt a szubrutint. A szubrutinba való belépés a 0002-es poziciónál történik. A 0001-es pozició az értel mezendő utasitás számára van fenntartva.

Feltéve, hogy az értelmezendő utasitások az r-edik memóriapoziciótól kezdve vannak elhelyezve, a szubrutin behivása a következőképpen történik:

.
.
.

r-2	Π4	2405	α	0002	behivó utasitások
r-1	Π4	74	0002	7777	
r					értelmezendő utasitások
r+1					
.					
.					
(α)=	Π4	2405	r	0001	

Programm

Pozicíószám	kód	jel	1.cim	2.cim	Megjegyzés.
0001	(			)	→ Értelmezendő utasitás helye
0002	(			)	
0003	00	+	0157	0002	00
0004	16	∧,	0001	0146	Ha nem kell az utasitást értelmezni, akkor végrehájtja.
0005	31	↓–,	0166	7777	
0006	34	⋎╓	0007	0001	
0007	05	π4	0174	0032	
0010	16	∧,	0147	0001	
0011	21	↓–	0152	0171	Megvizsgálja, hogy nyilas vagy nyilatlan müvelet-e?
0012	34	⋎╓	0017	0013	
0013	01	–	0152	0171	
0014	34	⋎╓	0030	0015	
0015	01	–	0152	0171	
0016	34	⋎╓	0017	0030	
0017	05	π4	0173	0023	
0020	16	∧,	0001	0153	
0021	20	↓+	0022	0022	
0022	10	+,	0000	0000	Beirja a második cim tartalmát a 0500 és 0501-es pozicióba.
0023	(			)	
0024	00	+	0155	0022	
0025	00	+	0155	0023	
0026	11	–,	0023	0156	
0027	34	⋎╓	0030	0022	
0030	16	∧,	0001	0154	Beirja az első cim tartalmát a 0502- és 0503-as pozicióba
0031	20	↓+	0032	0032	
0032	(			)	
0033	05	π4	0032	0035	
0034	00	+	0163	0035	
0035	(			)	
0036	16	∧,	0001	0147	
0037	20	↓+	0000	0172	→ A müveleti jel első számjegye
0040	16	∧,	0172	0160	Ha abszolutértékes müvelet, akkor a mantisszák abszolut értékét veszi.
0041	31	↓–,	0160	7777	
0042	34	⋎╓	0051	0043	
0043	11	–,	0150	0172	
0044	34	⋎╓	0051	0045	
0045	50	|+|,	0000	0500	
0046	20	↓+	0000	0500	

Pozició sz.	kód	jel	1.cim	2.cim	Megjegyzés
0047	50	|+|,	0000	0502	
0050	20	↓+	0000	0502	Megvizsgálja, hogy
0051	05	ΠY	0175	0055	melyik alapmüvelet
0052	16	∧,	0001	0146	és a megfelelő helyre
0053	33	↓×,	0162	7777	ugrik
0054	20	↓+	0055	0055	
0055	(			)	
0056	24	ΠY	0062	7777	→ összeadás
0057	24	ΠY	0111	7777	→ kivonás
0060	24	ΠY	0113	7777	→ osztás
0061	24	ΠY	0120	7777	→ szorzás
0062	03	×	0150	0500	
0063	03	×	0150	0502	
0064	00	+	0155	0501	
0065	00	+	0155	0503	
0066	01	−	0501	0503	
0067	34	YΠ	0070	0073	
0070	03	×	0150	0502	
0071	00	+	0155	0503	
0072	34	YΠ	0070	0100	ö sezadás
0073	00	+	0503	0501	
0074	01	−	0155	0503	
0075	34	YΠ	0100	0076	
0076	03	×	0150	0500	
0077	24	ΠY	0074	7777	
0100	00	+	0502	0500	
0101	06	∧	0165	0100	
0102	51	|−|,	0155	0500	
0103	34	YΠ	0124	0104	
0104	51	|−|,	0150	0500	
0105	34	YΠ	0106	0123	normalizálás
0106	02	:	0150	0500	
0107	01	−	0155	0501	
0110	24	ΠY	0104	7777	
0111	00	+	0151	0100	kivonás
0112	24	ΠY	0062	7777	
0113	03	×	0150	0500	
0114	00	+	0155	0501	osztás
0115	02	:	0502	0500	

0116	01	—	0503	0501	
0117	24	ПY	0101	7777	
0120	03	×	0502	0500	
0121	00	+	0503	0501	szorzás
0122	24	ПY	0101	7777	
0123	16	∧,	0172	0160	
0124	31	↓—,	0160	7777	Ha vesszőtlen müvelet, akkor az eredmény beirása a második cimre
0125	34	YП	0126	0140	
0126	16	∧,	0001	0153	
0127	20	↓+	0130	0130	
0130	05	ПY	0500	0000	
0131	10	+,	0163	0130	
0132	20	↓+	0000	0133	
0133	(			)	
0134	11	—,	0150	0172	Ha nyomtatóutasitás, akkor az eredmény kinyomtatása.
0135	34	YП	0140	0136	
0136	40	+П	0000	0500	
0137	40	+П	0000	0501	
0140	06	∧	0164	0022	Megváltozott müveletek helyreállitása
0141	06	∧	0164	0130	
0142	24	ПY	0002	7777	

K o n s t a n s o k

/oooo/=o		
/o146/=+o7	oooo	oooo
/o147/=+7o	oooo	oooo
/o150/=+40	oooo	oooo= $\frac{1}{2}$
/o151/=+o1	oooo	oooo
/o152/=+20	oooo	oooo
/o153/=+oo	oooo	7777
/o154/=+oo	7777	oooo
/o155/=+oo	oooo	ooo1
/o156/=+2o	oooo	o5o1
/o157/=+oo	ooo1	oooo
/o160/=+1o	oooo	oooo
/o161/=+50	oooo	oooo
/o162/=2^{-12}		
/o163/=+oo	ooo1	ooo1
/o164/=+77	7777	oooo
/o165/=+oo	7777	7777
/o166/=+o4	oooo	oooo
/o167/=+24	oo54	7777
/o170/=+77	oooo	7777
/o173/=+20	oooo	o5oo
/O174/=+o5	oooo	o5o2
/o175/=+24	oo56	7777

Munkapoziciók

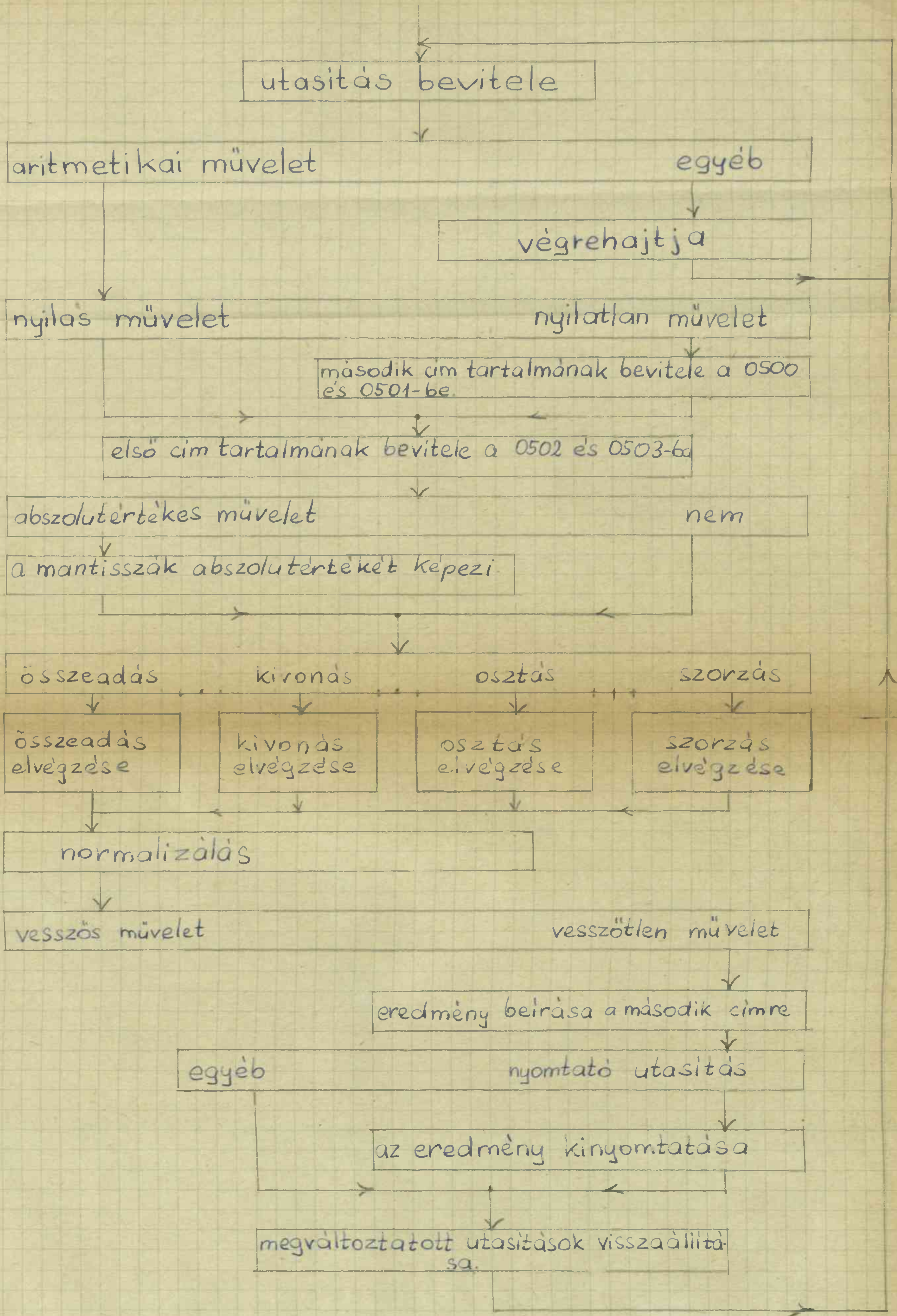
O171

/O172/: a müveleti jel első számjegye

o5oo: } B regisztert helyettesitő memóriapoziciók
o5o1:

o5o2: } Ide kerül az első cim tartalma
o5o3:

MENETREND


utasitás bevitele
aritmetikai müvelet
egyéb
végrehajtja
nyilas müvelet
nyilatlan müvelet
második cím tartalmának bevitele a 0500 és 0501-be.
elsö cím tartalmának bevitele a 0502 és 0503-ba
abszolutértékes müvelet
nem
a mantisszák abszolutértékét képezi
összeadás
kivonás
osztás
szorzás
összeadás elvégzése
kivonás elvégzése
osztás elvégzése
szorzás elvégzése
normalizálás
vesszös müvelet
vesszötlen müvelet
eredmény beirása a második címre
egyéb
nyomtató utasitás
az eredmény kinyomtatása
megváltoztatott utasitások visszaállitása.

Készitette: Dömölki Bálint
Ellenőrizte: Sándor Ferenc

Input és output szubrutin

A szubrutin n /≤63/szám gépbe való bevitelét és decimálisról binárisra való konvertálását /input/, illetve binárisról decimálisra való konvertálását és kinyomtatását /output/ végzi el. Az első bevitt, ill. kinyomtatandó szám cime x. A szubrutin végrehajtása után a gép az a cimen levő utasitásra tér át.

A szubrutin behivása input esetben

Πt	α	0100
ΠY	0102	—

output esetben a

Πt	α	0100
ΠY	0121	—

utasitásokkal történik, ahol az α pozicióban az

$$(\alpha) = \quad n \quad a \quad x$$

számot helyezzük el.

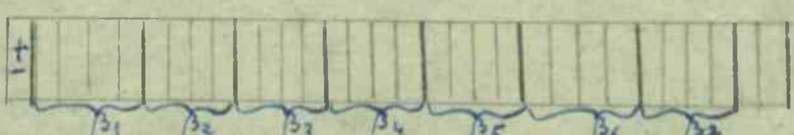
A 10 ⟶ 2 konverzió a

$$t = \sum_{k=1}^{7} \frac{\beta_k}{10^k} = \sum_{k=1}^{7} \frac{a_k}{\left(\frac{10}{16}\right)^k} = \left(\left(\left(\left(\left(\left(a_7 \cdot \frac{16}{10} + a_6\right)\frac{16}{10} + a_5\right)\frac{16}{10} + a_4\right)\frac{16}{10} + a_3\right)\frac{16}{10} + a_2\right)\frac{16}{10} + a_1\right)\frac{16}{10}$$

képlet alapján történik, ahol

$$a_k = \frac{\beta_k}{16^k}$$

és β_k a konvertálandó t szám k-ik decimális jegye:



Az a_k számokat tehát ugy kapjuk, hogy a t szám megfelelő számjegyeit logikai szorzással leválasztjuk.

A $2 \rightarrow 10$ konverzió alapjául az a tény szolgál, hogy a $t=0,\beta_1\beta_2\ldots\beta_7$ számot 10-el szorozva a tizedesvessző elé a β_1 szám kerül. Ha az eredményt most 16-al osztjuk /ez megfelel annak, mintha 10/16-al szoroztuk volna/ az első 4 helyértékben megkapjuk β_1-et. Az eljárást így folytatva, megkapjuk a megfelelő számjegyeket a megfelelő helyeken. A már leválasztott tizedesjegyeket törölni kell.

Ha az eljárás végén megmaradó 2 jegy közül az első /a 29 helyértéken levő/ 1-es, akkor az eredmény utolsó tizedesjegyét 1-el felkerekíthetjük.

0100	+n		a	α	
0101	.....		......	......	7
0102	Λ,	16	0155	0100	1
0103	↓+	20	0144	0101	
0104	—	01	0153	0100	2
0105	YΠ	34	0140	0106	
0106	Π4	05	~~0000~~ 0150	0125	3
0107	Π4	05	0145	0142	
0110	B6	07	–	0143	
0111	Πy	74	0113		
0112	:	02	0146	0142	6
0113	Λ,	16	0142	0143	4
0114	↓+,	30	0125	–	
0115	↓:	22	0147	0125	
0116	|–|,	51	0147	0142	5
0117	YΠ	34	0112	0101	
0120	+Π	40	0143	0125	13
0121	Λ,	16	0155	0100	8
0122	↓+	20	~~0000~~ 0150	0125	
0123	—	01	0153	0100	9
0124	YΠ	34	0140	0125	
0125	...		...	...	10
0126	↓+	20	~~0000~~ 0150	0143	
0127	Π4	05	0150	0125	
0130	Π4	05	0152	0142	
0131	×	03	0147	0143	11
0132	↓Λ	26	0142	0101	
0133	↓+	20	0125	0125	
0134	—	01	0101	0143	
0135	×	03	0146	0142	

0136	↓⊢1,	71	0145	-	12
0137	⊻π	34	0120	0131	
0140	1,	16	0154	0100	14
0141	↓+	20	0151	0142	
0142	.....		.....	.....	
0143	.....		.....	.....	
0144	π4	05	0125	0000	
0145		+ 00	0000	0074	
0146		+ 04	0000	0000	$= 2^{-4}$
0147		+ 50	0000	0000	$= 10/16$
0150		+ 00	0000	0002	$= 2^{-29}$
0151		+ 24	7777	~~7777~~ 0142	→ nem ellenőr,
0152		+ 74	0000	0000	konstansok
0153		+ 00	7777	7777	
0154		+ 00	7777	0000	
0155		+ 00	0000	7777	

602
− 540
142

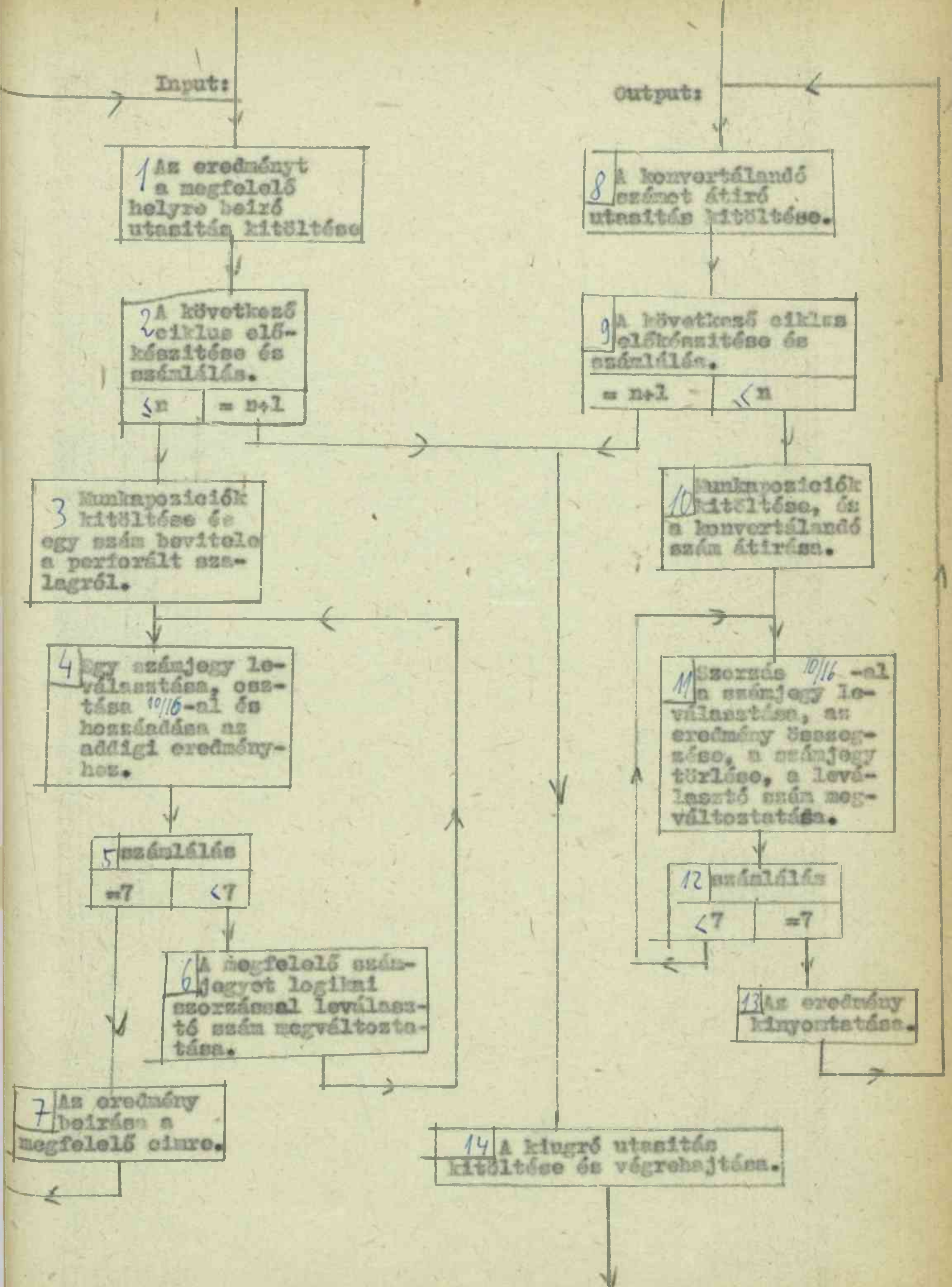
24 7777 0142
− 77 1250

00 1250 0000
24 7777 0142
125 1247 0142

05 1250 0320
− 00 7777 7777
04 1250 0321

00 1250 0320
− 00 7777 7777

− 77 1250 0321
24 7777 0142


Input:
1 Az eredményt a megfelelő helyre beiró utasitás kitöltése
2 A következő ciklus előkészitése és számlálás.
≤n
= n+1
3 Munkapoziciók kitöltése és egy szám bevitele a perforált szalagról.
4 Egy számjegy leválasztása, osztása 10/16-al és hozzáadása az addigi eredményhez.
5 számlálás
=7
<7
6 A megfelelő számjegyet logikai szorzással leválasztó szám megváltoztatása.
7 Az eredmény beirása a megfelelő cimre.
Output:
8 A konvertálandó számot átiró utasitás kitöltése.
9 A következő ciklus előkészitése és számlálás.
= n+1
<n
10 Munkapoziciók kitöltése, és a konvertálandó szám átirása.
11 Szorzás 10/16 -al a számjegy leválasztása, az eredmény összegzése, a számjegy törlése, a leválasztó szám megváltoztatása.
12 számlálás
<7
=7
13 Az eredmény kinyomtatása.
14 A kiugró utasitás kitöltése és végrehajtása.

Készitette: Veidinger László
Ellenőrizte: Sándor Ferenc
és
Dömölki Bálint

Lineáris egyenletrendszerek megoldása a Gauss-féle eliminációs módszerrel.[x]

A program segitségével meghatározhatjuk az

$$a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=b_1$$
$$a_{21}x_1+\ldots\ldots+a_{2n}x_n=b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n1}x_1+\ldots\ldots+a_{nn}x_n=b_n$$

lineáris egyenletrendszer megoldását abban az esetben, ha $n \leq 40$ és a rendszer determinánsa zérustól különböző. Az $x_1,\ldots\ldots,x_n$ ismeretleneket a gép lebegő pontu bináris alakban állitja elő; az ismeretlenek mantisszáit rendre a o47o,o472,... o47o+2/n-1/ poziciókban, a kitevőket pedig /"2^{-30} egységekben"/ a o471,o473,...,o471+2/n-1/ poziciókban helyezi el. Ha az egyenletrendszer determinánsa zérus, akkor a program végrehajtása közben a gép automatikusan megáll.

A program elkészitésénél feltettük, hogy az /előzőleg abszolut értékben 1-nél kisebbre normált/ a_{ij} együttható

---

[x] A Gauss-féle eliminációs módszer leirását megtalálhatjuk pl. L.Fox: Practical Solution of Linear Equations and Inversion of Matrices c. cikkében a Contributions to the Solution of Systems of Linear Equations and the Determination of Eigenvalues c. gyüjteményben. /U.S.Department of Commerce Nat. Bureau of Standards. Applied Math. Series.39.1954./

/i=1,.....,n; j=1,.....,n/ a 0470+/i-1//n+1/+j pozicióban van elhelyezve, a b_ν állandó /ν=1,...,n/ pedig a 0470+/ν-1//n+1/ pozicióba van elhelyezve fixpontos bináris alakban; a fix bináris pontot az első számjegy elé képzeljük.

A program az eliminációs módszernek megfelelően két részből tevődik össze: az eliminációból és a trianguláris egyenletrendszer megoldásából /1-6; illetve 7-11 blokk/. Az eliminációhoz szükséges műveleteket közönségesen fix bináris ponttal végezzetjük el a trianguláris rendszer megoldásához szükséges műveleteknél "lebegő" bináris pontot" alkalmazunk.

A konstansok egy része és két utasitás /a 0274 és a 0277/ cimei paraméterként tartalmazzák n-et. Ezeket a konstansokat ill. utasitásokat vagy minden esetben külön ki számitva visszük be, vagypedig az n paraméterből egy külön program segitségével számitjuk ki és helyezzük el a megfelelő memóriapoziciókban.

A blokkokhoz irt szövegben az egész egyenletrendszer együttható mátrixát A_0-lal, bővitett mátrixát B_0-lal, az első h ismeretlen eliminációja után keletkezett n-h ismeretlenes egyenletrendszer együttható mátrixát A_h-val, bővitett mátrixát B_h- val jelöljük.

Program

I.rész.

o12o	Пч	o5	oo24	olol	1/ Bizonyos konstansok elhelyezése munkapoziciókban.
o121	Пч	o5	oo25	o122	
o122		..	....	....	
o123	+	oo	oo67	olol	
o124	+	oo	oo43	o122	
o125	$\downarrow\|-\|_1$	71	oo7o	——	
o126	Уп	34	o122	o127	
o127	Пч	o5	oo22	o13o	
o13o		..	....	....	
o131	+	oo	oo16	o13o	
o132	$\downarrow\|-\|_1$	71	oo23	——	
o133	Уп	34	o13o	o134	

o134	Пч	o5	oo72	o122	2/ Meghatározzuk az A_h mátrix /h=0,...,n-2/ legnagyobb abszolut értékü elemének: α_{kl}-nek pozicióját, számértékét és 1-et.
o135	Пч	o5	oo26	o136	
o136		..	....	....	
o137	Уп	34	o14o	o144	
o14o	$\wedge$	o6	oo27	o136	
o141	$\downarrow\wedge_1$	36	oo3o	——	
o142	$\downarrow\times_1$	33	oo31	——	
o143	$\downarrow\dot{+}$	2o	o136	o136	
o144	+	oo	ooo2	o136	
o145	$\|-\|_1$	51	o122	o136	
o146	Уп	34	o136	o147	
o147	+	oo	oo32	o122	
o15o	+	oo	oo73	o136	
o151	$\downarrow\|-\|_1$	71	oo74	——	
o152	Уп	34	o136	o153	
o153	$\wedge$	o6	oo33	o136	
o154	$\downarrow$+	2o	oo41	o155	
o155		..	....	....	
o156	$\downarrow\times$	23	oo44	o155	
o157	Пч	o5	o136	o122	
o16o	+	oo	oo34	o122	

o161	↓-	21	1135	o13o
o162	Yπ	34	o16o	o163
o163	|-|,	51	o13o	o136
o164	↓+	2o	oooo	o122
o165	↓:,	32	oo31	——
o166	↓+	2o	oo36	o172
o167	Πч	o5	oo76	o173
o17o	↓+	2o	o122	o173
o171	Πч	o5	oo77	o174
o172		..	....	....
o173		..	....	....
o174		..	....	....
o175	+	oo	ooo2	o172
o176	+	oo	oo16	o173
o177	+	oo	oo43	o174
o2oo	↓|-|,	71	o1oo	——
o2o1	Yπ	34	o172	o2o2
o2o2	:,	12	oo31	o13o
o2o3	↓+	2o	oo37	o2o7
o2o4	Πч	o5	o1o2	o21o
o2o5	↓+	2o	o13o	o21o
o2o6	Πч	o5	o1o3	o211
o2o7		..	....	....
o21o		..	....	....
o211		..	....	....
o212	+	oo	oo32	o2o7
o213	+	oo	oo4o	o21o
o214	+	oo	oo34	o211
o215	↓|-|,	71	o1o1	——
o216	Yπ	34	o2o7	o217

3/ A B_h mátrix k-adik sorát kicseréljük az n-h-adik sorral, az A_o mátrix l-edik oszlopát az n-edik oszloppal.

o217	Н,	51	oo41	o155
o22o	Уп	34	o226	o221
o221	Пч	o5	oo42	o222
o222		••	••••	••••
o223	+	oo	oo43	o222
o224	↓Н,	71	oo75	—
o225	Уп	34	o222	o233
o226	Пч	o5	o111	o227
o227		••	••••	••••
o23o	+	oo	oo43	o227
o231	↓Н,	71	o112	—
o232	Уп	34	o227	o233
o233	Пч	o5	o1o4	o236
o234	Пч	o5	oo45	o241
o235	Пч	o5	o1o6	o24o
o236		••	••••	••••
o237	ПУ	24	o24o	o122
o24o		••	••••	••••
o241		••	••••	••••
o242	+	oo	oo16	o241
o243	+	oo	oo43	o24o
o244	↓Н,	71	o1o5	—
o245	Уп	34	o24o	o246
o246	+	oo	oo34	o236
o247	+	oo	o1o7	o241
o25o	↓Н,	71	o11o	—
o251	Уп	34	o235	o252
o252	—	o1	ooo2	oo72
o253	+	oo	ooo2	oo73
o254	—	o1	oo46	oo74
o255	—	o1	oo47	oo75
o256	—	o1	oo32	oo76
o257	—	o1	oo34	oo77
o26o	—	o1	oo47	o1oo
o261	—	o1	ooo2	o1o2

4/ Ha $\alpha_{k1} \geq \frac{1}{2}$, akkor az /uj/ n-h-adik sor kivételével a B_h mátrix minden sorát megszorozzuk $\frac{1}{2}$ -el, ha $|\alpha_{k1}| < \frac{1}{2}$, akkor az n-h-adik sort elosztjuk $\frac{1}{2}$ -el.

5/ Minden $i \neq$ n-h-ra a B_h mátrix n-h-adik sorát megszorozzuk $-\frac{\alpha_{i,n-h}}{\alpha_{n-h,n-h}}$-val és hozzáadjuk az i-edik sorhoz.

6/ Előkészület a következő eliminációs menetre / bizonyos munkapoziciók tartalmának megváltoztatása/

o262	— o1	oo43	o1o3
o263	— o1	oo43	o1o4
o264	— o1	oo47	o1o5
o265	— o1	oo34	o1o6
o266	+ oo	oo16	o1o7
o267	— o1	oo32	o11o
o27o	— o1	oo34	o111
o271	— o1	oo47	o112
o272	Н, 51	oo5o	oo73
o273	УП 34	o134	o274

II. rész

0274	Λ_1	16	0471+n/n+1/	0033	7/ Bizonyos konstansok elhelyezése munkapozicióknban A 0472,0470+n+4,.. ...,0470+n/n+1/ poziciók kiüritése.
0275	↓+	20	0051	0440	
0276	↓+	20	0016	0441	
0277	ПЧ	05	0052	0471+n/n+1/	
0300	ПЧ	05	0053	0072	
0301	ПЧ	05	0054	0073	
0302	ПЧ	05	0055	0074	
0303	ПЧ	05	0056	0075	
0304	ПЧ	05	0057	0076	
0305	ПЧ	05	0060	0316	
0306	ПЧ	05	0061	0317	
0307	ПЧ	05	0062	0320	
0310	ПЧ	05	0065	0342	
0311	ПЧ	05	0063	0312	
0312		..	....	....	
0313	+	00	0047	0312	
0314	↓|-|,	71	0064	—	
0315	Yп	34	0312	0316	
0316		--	----	----	8/ Az x_i ismeretlen meghatározása /i=1,...,n/
0317		..	....	....	
0320		..	....	....	
0321	|-|,	51	0043	0102	
0322	Yп	34	megállás	0323	
0323	X	03	0041	0103	
0324	+	00	0043	0104	
0325	|-|,	51	0102	0103	
0326	Yп	34	0332	0327	
0327	:	02	0041	0102	
0330	+	00	0043	0104	
0331	ПY	24	0325	—	
0332	:	02	0102	0103	

0333	↓|-|₁	71	0043	-
0334	Yπ	34	0342	0335
0335	|-|₁	51	0041	0103
0336	Yπ	34	0337	0342
0337	:	02	0041	0103
0340	—	01	0043	0104
0341	ΠY	24	0335	—
0342		..	....	....
0343	↓+	20	0016	0345
0344		..	....	....
0345		..	....	....
0346	|-|₁	51	0066	0342
0347	Yπ	34	0350	0440
0350	Πy	05	0072	0356
0351	Πy	05	0073	0357
0352	Πy	05	0074	0360
0353	Πy	05	0075	0415
0354	Πy	05	0076	0416
0355	Πy	05	0104	0107
0356		..	....	....
0357		..	....	....
0360		..	....	....
0361	X₁	13	0103	0077
0362	↓|-|₁	71	0043	—
0363	Yπ	34	0415	0364
0364	|-|₁	51	0041	0077
0365	Yπ	34	0366	0371
0366	:	02	0041	0077
0367	—	01	0043	0107
0370	ΠY	24	0364	—
0371	X	03	0103	0077
0372	|-|₁	51	0043	0100
0373	Yπ	34	0404	0374
0374	—	01	0101	0107
0375	X	03	0041	0100

9/ Az x_i ismeretlen behelyettesítése az i+1-edik egyenletbe /i=1,...,n-1/

0376	+	00	0043	0101	
0377	—	01	0043	0107	
0400	Yπ	34	0401	0375	
0401	×	03	0041	0077	
0402	+	00	0043	0107	
0403	Yπ	34	0401	0405	
0404	Πγ	05	0107	0101	
0405	—	01	0077	0100	
0406	|-|,	51	0043	0100	
0407	Yπ	34	0415	0410	
0410	|-|,	51	0041	0100	
0411	Yπ	34	0412	0415	
0412	:	02	0041	0100	
0413	—	01	0043	0101	
0414	ΠY	24	0410	-	
0415		..	....	....	
0416		..	....	....	
0417	+	00	0032	0356	
0420	+	00	0032	0357	
0421	+	00	0046	0360	
0422	+	00	0034	0415	
0423	+	00	0047	0416	
0424	|-|,	51	0025	0416	
0425	Yπ	34	0355	0426	
0426	+	00	0032	0316	10/Utasítások címeinek ill. munkapoziciók tartalmának megváltoztatása
0427	+	00	0046	0317	
0430	+	00	0046	0320	
0431	+	00	0002	0342	
0432	+	00	0046	0072	
0433	+	00	0032	0073	
0434	+	00	0046	0074	
0435	+	00	0034	0075	
0436	+	00	0047	0076	
0437	ΠY	24	0316	-	
0440		..	....	....	11./ Az elsőnek kiszámitott ismeretlen elhelyezése a megfelelő memóriapoziciókban.
0441		--	....	....	

Konstansok

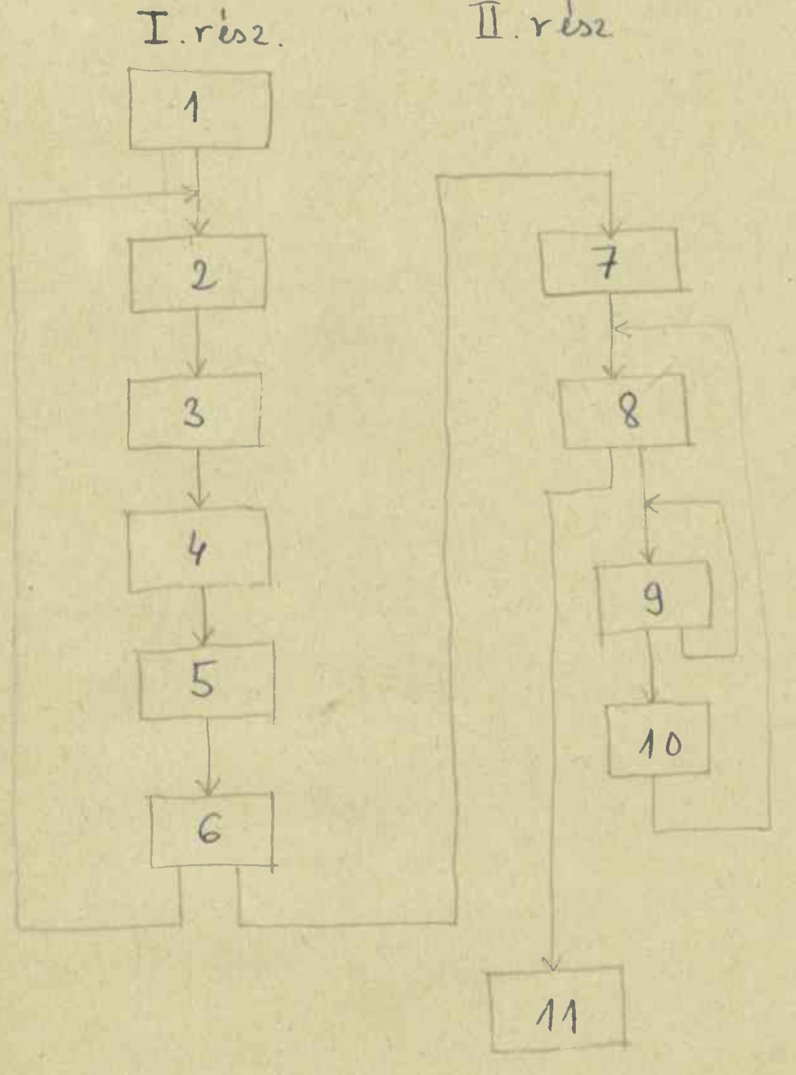
/0001/=	$\vert-\vert_1$	51	0471+n	0000
/0002/=	+	00	0001	0000
/0003/=	$\vert-\vert_1$	51	0470+n/n+1/	0000
/0004/=	X	03	0041	0470+/n-1//n+1/
/0005/=	Пч	05	0470+/n-1//n+1/0000	
/0006/=	Пч	05	0122	0470+/n-1//n+1/
/0007/=	Пч	05	0122	0470+n/n+1/
/0010/=	Пч	05	0122	$0470+/n+1/^2$
/0011/=	Пч	05	0470+n	0470
/0012/=	Пч	05	0122	0470+n
/0013/=	:,	12	0155	0470+n
/0014/=	X_1	13	0122	0467+n/n+1/
/0015/=	X_1	13	0122	0470+/n-1//n+1/
/0016/=	+	00	0001	0001
/0017/=	↓+	20	0470+/n-1//n+1/0000	
/0020/=	:	02	0041	0470+/n-1//n+1/
/0021/=	:	02	0041	0470+n/n+1/
/0022/=	Пч	05	0001	0072
/0023/=	Пч	05	0022	0000
/0024/=	Пч	05	0103	0470
/0025/=	Пч	05	0101	0471+n/n+1/
/0026/=	$\vert-\vert_1$	51	0472	0471
/0027/=	+	77	7777	0000
/0030/=	+	00	7777	0000
/0031/=	+	00	0100	0000
/0032/=	+	00	n+1	0000
/0033/=	+	00	0000	7777
/0034/=	+	00	0000	n+1
/0035/=	+	00	0000	0470+n/n+1/
/0036/=	Пч	05	0000	0122
/0037/=	Пч	05	0470	0122
/0040/=	+	00	n+1	n+1
/0041/=	+	10	0000	0000
/0042/=	X	03	0041	0470
/0043/=	+	00	0000	0001

/0044/=		-77	7777	7777
/0045/=	↓+	20	0470	0470
/0046/=	+	00	n+2	0000
/0047/=	+	00	0000	n+2
/0050/=	+	00	n	0000
/0051/=	Пч	05	0105	0000
/0052/=	Пч	05	0103	0105
/0053/=	Пч	05	0472+n	0077
/0054/=	Пч	05	0471+n	0100
/0055/=	Пч	05	0474+n	0101
/0056/=	Пч	05	0100	0471+n
/0057/=	Пч	05	0101	0474+n
/0060/=	Пч	05	0470	0103
/0061/=	Пч	05	0471	0102
/0062/=	Пч	05	0472	0104
/0063/=	Пч	05	0000	0472
/0064/=	Пч	05	0000	0471+n/n+1/
/0065/=	Пч	05	0471+n/n+1/	0344
/0066/=	Пч	05	0467+/n+1/^{2}	0000
/0067/=	+	00	0000	0002
/0070/=	Пч	05	0101	0470+/n+1/^{2}

Munkapoziciók

0072; 0073; 0074; 0075; 0076; 0077; 0100;
0101; 0102; 0103; 0104; 0105; 0106; 0107;
0110; 0111; 0112.

Blokk-diagramm.



Készitette: Szelezsán János
Ellenőrizte: Dömölki Bálint

Runge Kutta módszer.

A Runge Kutta módszer egyik legjobban elterjedt numerikus integrálási módszer. Előnye, hogy eléggé pontos, s elég nagy lépésközöket lehet használni. Kézi számításban nagy hátránya viszont, hogy sok számítást igényel, mivel aránylag sokszor kell a differenciaegyenletbe behelyettesiteni, s azonkivül a hibát nem jelzi semmi. Gépi számításnál ez a hátrány csökken, s különösen fontos itt az az előnye, hogy nem kell kezdőértékeket számolni, mint más módszereknél. Általában esetenként kell eldönteni, melyik módszer használata előnyösebb.

A módszer elméletével nem foglalkozunk, ez megtalálható Collatz: "Numerische Behandlung von Differentialgleichungen" c. könyvében /59-65.o./. Azokat a kész sémákat programozzuk be, amelyek az említett mű 66-77 oldalán találhatók.

A módszereket fix ponttal programozzuk be; ez a differenciálegyenletre s a megoldásra is megszoritást jelent, t.i. ügyelni kell arra, hogy minden szereplő adat abszolut értékben egynél kisebb maradjon. Ezt a feltételt minden esetben külön megvizsgáljuk. Ha az adott feltételek nem teljesithetők, akkor lebegőponttal való számolásra térünk át.

A közelités pontosságának megállapitására nem ismerünk általános módszereket. A $h=\frac{b-a}{n}=x_i-x_{i-1}$ lépésközt ugy választjuk meg, hogy

/1/ $$\frac{|k_2-k_3|}{|k_1-k_2|} \leq \varepsilon \qquad \left(\varepsilon \approx \frac{3}{100}\right)$$ azaz

$|k_2-k_3|$ a $|k_1-k_2|$-nek csak néhány %-a legyen. /Lásd Collatz említett könyve: 68.old./ /A k_i jelentését lásd a megfelelő képletekben/.

Kiindulunk tehát egy valamilyen k-ból, és beprogramozzuk /1/ vizsgálatát s ha /1/ nem teljesül, akkor felezzük a h lépésközt s tovább $\frac{h}{2}$-el számolunk.

A kinyomtatás és konvertálás a konvertáló szubrutin be-hívásával történik.

A sémákban y_i-vel jelöljük a megoldás x_i pontban vett közelítő értékét.

Készitette: Szelezsán János

Ellenőrizte: Dömölki Bálint

Elsőrendü közönséges differenciálegyenlet megoldása

Runge-Kutta módszerrel

Legyen adva az $y'=f/x,y/$ differenciálegyenlet a $y/x_0/=y_0$ kezdeti feltétellel. Ennek közelitő numerikus megoldását az /ab/ intervallumban a következő sémába foglalt képlettel oldhatjuk meg a Runge-Kutta módszer szerint. /Lásd Collatz 66.o./

x	y	k=h.f/x,y/	
x_{n-1}	y_{n-1}	k_1	
$x_{n-1}+\frac{1}{2}h$	$y_{n-1}+\frac{1}{2}k_1$	k_2	$k=\frac{1}{6}/k_1+2k_2+2k_3+k_4/$
$x_{n-1}+\frac{1}{2}h$	$y_{n-1}+\frac{1}{2}k_2$	k_3	
$x_{n-1}+h$	$y_{n-1}+k_3$	k_4	

$x_n=x_{n-1}+h$ $\qquad$ $y_n=y_{n-1}+k$

Mivel a gép fixponttal müködik, ezért ügyelni kell arra, hogy mind a közbülső, mind a végeredmények abszolut értékben $1-2^{-30}$-nál ne legyenek nagyobbak.

Legyen az

$X = u(x,y) \quad Y = v(x,y)$ olyan transzformáció, amely az adott differenciálegyenletre alkalmazva olyan

$$Y' = F(X,Y) \qquad Y(X_0) = Y_0$$

differenciálegyenlethez vezet, amelyben

$$|Y'| < 1 \qquad |Y| < K < 1 \qquad |X| < 1 \qquad /1/$$

Az /1/ feltétel biztositja, hogy a közbülső eredmények sem csordulnak tul. Ugyanis $|k_i| = |h\, f(x,y)| < h \quad (i = 1,2,3,4)$

s igy

$$|y_n + k_3| \leq |y_n| + |k_3| < |y_n| + h \leq 1 - 2^{-30}$$

ha $|y_n| \leq 1 - 2^{-30}$; mégimkább $|y_n + \frac{1}{2} k_i|$-re $(i = 1,2)$

Mivel: $|k| = |\frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)| < \frac{1}{6} 6h = h$

ezért $K = 1 - 2^{-30} - h$-t véve /1/ feltétel biztositja a tulcsordulás elkerülését.

Tegyük fel, hogy $h \leq 0{,}1$ /Mivel $|x| < 1$, ezért ez nem lényeges megszoritás, legalább 2o osztópontot mindig veszünk./

Megjegyzés

Nyilvánvaló, hogy ha

$$|y'| < 1 \qquad |y_0| < 1 - \delta$$

és $\quad |x| \leq \delta < 1$

akkor $\quad |y| < 1$

ugyanis $|k| < h$ lévén

$$y_n = y_{n-1} + k\text{-ból}$$

$$|y_n - y_{n-1}| < h$$

Tehát a megoldás lépésenként legfeljebb h-val növekszik.

Az ℓ-edik pontban vett közelitő értékme tehát

$$|y_\ell| < |y_0| + \ell h.$$

Ha $|y_0| + \ell h < 1.$

azaz $|y_0| < 1 - \ell h$

akkor $|y_\ell| < 1.$

Ha tehát $|y_0| < 1 - \delta$

Akkor $\max\limits_{(\ell)} |y_\ell| < 1$

Pozicióelosztás

Legyen elhelyezve az $y_n' = f/x_n y_n/$-t kiszámitó szubrutin az α-tól α+k-1 ig terjedő poziciókban s $(\alpha + k) =$ Пy 0030 7777 legyen. A 0030-ban helyezzük el minden esetben a szubrutint kiugrató utasitást./A szubrutin végén ide adjuk át a vezérlést/ A $f/x_n y_n/$ értéket mindig a 0031 pozicióban helyezzük el, x_n helye mindig 0032, y_n helye mindig 0033 legyen.

Konstansok:

0001=	$\frac{1}{3}$		
0002=	24 Пy	0105	7777
0003=	24 Пy	0114	7777
0004=	24 Пy	0125	7777
0005=	24 Пy	0137	7777
0006=	~~24~~ $\frac{1}{2}$		
0007=	02	0032	0145

Paraméterek:

0010=	$x_0 = a$		
0011=	y_0		
0012=	$\frac{h}{2}$		
0013=	$b - h$		
0014=	Пy	α	7777
0015=	ε		
0022=	ϑ.		

Munkapoziciók 0016 0017 0020 0021

Program

0100	05	Пτ	0011	0033	
0101	05	Пτ	0010	0032	
0102	05	Пτ	0002	0030	
0103	05	Пτ	0033	0017	
0104	24	Пy	0014	7777	kiszámitja $f/x_n, y_n/$-t s beirja 0031-be
0105	03	×	0012	0031	
0106	20	↓+	0000	0016	
0107	00	+	0012	0032	
0110	10	+,	0031	0017	
0111	20	↓+	0000	0033	
0112	05	Пτ	0003	0030	
0113	24	Пy	0014	7777	
0114	03	×	0012	0031	
0115	20	↓+	0017	0033	

0116	11	−,	0031	0016	
0117	23	↓×	0015	002o	
0120	05	Πτ	0031	0021	
0121	1o	+,	0031	0031	
0122	20	↓+	0016	0016	
0123	05	Πτ	0004	003o	
0124	24	Πy	0014	7777	
0125	03	×	0012	0031	
0126	2o	↓+	0031	0033	
0127	2o	↓+	0016	0016	
013o	11	−,	0031	0021	
0131	71	↓+1,	0020	7777	
0132	34	⊻Π	0133	0147	
0133	00	+	0012	0032	
0134	00	+	0017	0033	
0135	05	Πτ	0005	003o	
0136	24	Πy	0014	7777	
0137	13	×,	0012	0031	
0140	30	↓+,	0016	−	
0141	33	↓×,	0001	−	
0142	2o	↓+	0017	0033	
0143	05	Πτ	0007	β	
0144	24	Πy	β+2	—	konvertálására és kinyomtatására
0145	11	−,	0032	0013	szolgál
0146	34	⊻Π	megállás	0147	
0147	00	+	0012	0013	
015o	01	−	0012	0032	
0151	03	×	0006	0012	
0152	05	Πτ	0017	0033	
0153	11	−,	0012	0022	
0154	34	⊻Π·	0102	megáll	

Készitette: Szolesmán János
Ellenőrizte: Dömölki Bálint.

Másodrendű közönséges differenciálegyenlet megoldása Runge Kutta módszerrel

Legyen adva az $y''=f/x,y,y'/$ differenciálegyenlet az $y/x_0/=y_0$ $y'_0/x_0/=y'_0$ kezdeti feltétellel. Ennek közelitő numerikus megoldását az (ab) intervallumban a Runge Kutta módszer szerint a következő séma alapján számolhatjuk ki.

x	y	$hy'=v_1$	$k=\frac{h^2}{2} f\left(x,y,\frac{v_1}{h}\right)$
x_{n-1}	y_{n-1}	v_{1n-1}	k_1
$x_{n-1}+\frac{h}{2}$	$y_{n-1}+\frac{1}{2}v_{1n-1}+\frac{1}{4}k_1$	$v_{1n-1}+k_1$	k_2
$x_{n-1}+\frac{h}{2}$	$y_{n-1}+\frac{1}{2}v_{1n-1}+\frac{1}{4}k_1$	$v_{1n-1}+k_2$	k_3
$x_{n-1}+h$	$y_{n-1}+v_{1n-1}+k_3$	$v_{1n-1}+2k_3$	k_4
$x_n=x_{n-1}+h$	$y_n=y_{n-1}+v_{1n-1}+k$	$v_{1n}=v_{1n-1}+k'$	

$$k=\frac{1}{3}/k_1+k_2+k_3/$$

$$k'=\frac{1}{3}/k_1+2k_2+2k_3+k_4/$$

Mivel a gép fixponttal működik, ezért ügyelni kell arra, hogy mind a közbülső, mind a végeredmények $1-2^{-30}$-nál abszolut értékben ne legyenek nagyobbak.

Legyen az $X = u(x,y)$ $Y = v(x,y)$

olyan transzformáció, amely az adott differenciálegyenletre alkalmazva olyan

$$Y'' = F(X,Y,Y') \quad Y(X_0) = Y_0 \quad Y'(X_0) = Y'_0$$

differenciálegyenlethez vezet, amelyben

/1/ $\quad |Y''| \le 1-2^{-30} \quad |Y'| \le 1-2^{-30} \quad |Y| \le K < 1 \quad |X| \le 1-2^{-30}$

Az /1/ feltétel biztosítja, hogy a közbülső eredmények sem csordulnak túl, a közbülső eredmények vizsgálata meghatározza K értékét is.

Ugyanis:

$$|k_i| = \left|\frac{h^2}{2} f(x,y,y')\right| < \frac{h^2}{2} \quad \text{s} \quad |v_{1n-1}| = |h\,y'_n| < h.$$

a táblázat második oszlopában lévő

$$y_{n-1} + p\,v_{1n-1} + q\,k_i \qquad (|p| \le 1,\ |q| \le 1)$$

típusú összegekre:

a/ $|y_{n-1} + p\,v_{1n-1} + q\,k_i| \le |y_{n-1}| + |v_{1n-1}| + |k_i| <$

$< |y_{n-1}| + h + \frac{h^2}{2} \le 1-2^{-30}.$

ha $\quad |y_{n-1}| \le 1-2^{-30} - \left(h + \frac{h^2}{2}\right)$

/Ezzel a becsléssel biztosítjuk azt is, hogy a két tagból képzett összegek sem csordulnak túl, s $|v_{1n-1} + 2k_3| \le 1-2^{-30}$ is teljesül, lévén $|v_{1n-1} + 2k_3| \le |v_{1n-1}| + 2|k_3| < h + 2\frac{h^2}{2} \le 1-2^{-30}$

Mivel $\quad |k| = \left|\frac{1}{3}(k_1 + k_2 + k_3)\right| < \frac{1}{3}\,3\,\frac{h^2}{2} = \frac{h^2}{2}$

$|k'| = \left|\frac{1}{3}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\right| < \frac{1}{3}\,6\,\frac{h^2}{2} = h^2.$

Igy itt sem történik tulcsordulás. Tehát $K = 1-2^{-30}-$ $-(h+\frac{h^2}{2})$ -t véve, az /1/ feltétel biztosit tulcsordulás ellen.

Nyilvánvaló, hogy ha

$|X| < K < 1 \quad |y''| \leq 1-2^{-30}$ és $|y_0| < K_0 < 1 \quad |y_0'| < K_1 < 1.$

akkor $|y| < K_2 \cdot 1 - 2^{-30} - (h+\frac{h^2}{2}) < 1.$

Ugyanis:

$$|k| < \frac{h^2}{2}$$

$$|k'| < h^2$$

s igy $v_{1n} = v_{1n-1} + k'$ lévén

$$h y_n' = h y_{n-1}' + k'$$

$$y_n' = y_{n-1}' + \frac{k'}{h}.$$

$$|y_n' - y_{n-1}'| \leq \left|\frac{k'}{h}\right| < \frac{h^2}{h} = h.$$

Tehát az első differenciálhányadosok lépésenként legfeljebb h-val növekszenek.

Ha tehát

$$|y_0'| < 1 - lh \qquad (lh < 1) \quad \text{akkor}$$

$$|y'| < 1$$

A megoldásra igy nyilván a következőket mondhatjuk.

Mivel

$$y_n = y_{n-1} + v_{1n-1} + k.$$

igy: $\quad y_n - y_{n-1} \leq |v_{1\,n-1}| + |k|$

De az előbb biztositottuk, hogy $|y'| < 1$, tehát

$|v_1| = |h\, y'|$ lévén $|v_1| < h$ s igy

$$|y_n - y_{n-1}| < h + \frac{h^2}{2}$$

Tehát a megoldás lépésenként legfeljebb $(h+\frac{h^2}{2})$ -vel növekszik.

Igy ha:

$$|y_0| \le 1-2^{-30}-(l+1)\left(h+\frac{h^2}{2}\right)$$

/megfelelően választott K korlát és h lépésköz esetén a jobboldal >0/,

akkor:

$$|y_l| \le |y_0| + \sum_{k=1}^{l}\left(h+\frac{h^2}{2}\right) < 1-2^{-30}-\left(h+\frac{h^2}{2}\right)$$

Ha 1^x/ teljesül , tehát, akkor az /1/ feltétel is teljesül.

Pozicióelosztás

Legyen az $f/x_n,y_n,y'_n/$-t kiszámitó szubrutin az α-tól $\alpha+k-1$-ig terjedő poziciókban; s ebben a szubrutinban fix poziciókként jelöljük ki a következőket

x_n	helye mindig	0001
y_n	" "	0002
y'_n	" "	0003 legyen.

Az $f/x_n,y_n\ y'_n/$-t mindig 0004-ban helyezzük el, s a szubrutinból való kiugráskor mindig 0005-nek adjuk át a vezérlést.

Konstansok

/0021/= $\frac{1}{3}$

/0022/= $\frac{1}{2}$

/0023/= $\frac{1}{4}$

/0024/= 24 Ty o112 7777

/0025/= 24 Ty o125 7777

/0026/= 24 Ty o133 7777

/0027/= 24 Ty o152 7777

Paraméterek

/0010/= $x_0 = a$

/0011/= y_0

/0012/= y'_0

/0013/= h

/0014/= b

/0015/=24 Ty α 7777

/0016/=o3 ooo1 o17o

/0017/= ε

/0020/= ϑ.

Munkapoziciók:

oo3o oo31 oo32 oo33 oo34 oo35 oo36 oo37

00075	05	Пτ	0010	0001	
0076	05	Пτ	0011	0002	
0077	05	Пτ	0012	0003	
0100	11	−,	0013	0014	
0101	20	↓+	0000	0034	b-h
0102	13	×,	0013	0022	
0103	20	↓+	0000	0032	$\to \frac{h}{2}$
0104	23	↓×	0013	0033	$\to \frac{h^2}{2}$
0105	13	×,	0013	0003	
0106	20	↓+	0000	0031	
0107	05	Пτ	0024	0005	
0110	05	Пτ	0002	0030	$\to y_0$
0111	24	Пγ	0015	7777	$\to y_0'$
0112	00	+	0032	0001	$\to x_0 + \frac{h}{2}$
0113	03	×	0033	0004	
0114	13	×,	0023	0004	$\to k_1$
0115	20	↓+	0002	0002	
0116	13	×,	0022	0031	
0117	20	↓+	0002	0002	$y_0 + \frac{v_{10}}{2} + \frac{k_1}{4}.$
0120	05	Пτ	0004	0035	
0121	10	+,	0031	0004	
0122	22	↓:	0013	0003	$\to \frac{v_{10} + k_1}{h}.$
0123	05	Пτ	0025	0005	
0124	24	Пγ	0015	7777	
0125	03	×	0033	0004	
0126	30	↓+,	0031	7777	
0127	22	↓:	0013	0003	
0130	05	Пτ	0004	0036	$\to k_2$
0131	05	Пτ	0026	0005	
0132	24	Пγ.	0015	7777	
0133	03	×	0033	0004	$\to k_3$
0134	11	−,	0036	0035	
0135	23	↓×	0017	0037	
0136	11	−,	0004	0036	
0137	31	↓−,	0037	7777	
0140	34	ΣП	0141	0171	
0141	00	+	0004	0036	$\to k_2 + k_3$
0142	00	+	0032	0001	$\to x_0 + h.$
0143	10	+,	0030	0031	

o144	2o	↓+	ooo4	ooo2	
o145	12	:,	oo22	ooo4	
o146	3o	↓+,	oo31	7777	
o147	22	↓:	oo13	ooo3	
o15o	o5	⊓τ	oo27	ooo5	
o151	24	⊓γ	oo15	7777	
o152	o3	×	oo33	ooo4	
o153	1o	+,	oo35	oo36	
o154	33	↓×,	oo21	7777	
o155	3o	↓+,	oo31	7777	
o156	2o	↓+	oo3o	ooo2	y_n
o157	oo	+	oo35	ooo4	
o16o	12	:,	oo22	oo36	
o161	3o	↓+,	ooo4	7777	
o162	33	↓×,	oo21	7777	
o163	2o	↓+	oo31	oo31	
o164	22	↓:	oo13	ooo3	$\frac{v_1}{h} = y_1'$
o165	o5	⊓τ	oo16	β	
o166	24	⊓γ	β+2	7777	
o167	11	−,	ooo1	oo34	
o17o	34	⅄⊓	megáll	o1o7	
o171	o1	−	oo32	ooo1	
o172	o3	×	oo22	oo13	
o173	o5	⊓τ,	oo3o	ooo2	
o174	12	:,	oo13	oo31	
o175	2o	↓+	oooo	ooo3	
o176	11	−,	oo13	oo2o	
o177	34	⅄π	o1oo	megáll	

Készitette: Szelezsán János
Ellenőrizte: Dömölki Bálint

Harmadrendű közönséges differenciálegyenlet megoldása Runge-Kutta módszerrel.

Legyen adva az $y''' = f/x,y,y',y''/$ differenciálegyenlet az $y/x_0/=y_0$ $y'/x_0/=y'_0$ $y''/x_0/=y''_0$ kezdeti feltétellel. Ennek közelítő numerikus megoldását az (ab) intervallumban a Runge-Kutta módszerrel a következő séma szerint számolhatjuk ki.

x	y
x_{n-1}	y_{n-1}
$x_{n-1}+\frac{1}{2}h$	$y_{n-1}+\frac{1}{2}v_{1n-1}+\frac{1}{4}v_{2n-1}+\frac{1}{8}k_1$
$x_{n-1}+\frac{1}{2}h$	$y_{n-1}+\frac{1}{2}v_{1n-1}+\frac{1}{4}v_{2n-1}+\frac{1}{8}k_1$
$x_{n-1}+h$	$y_{n-1}+v_{1n-1}+v_{2n-1}+k_3$
$x_n=x_{n-1}+h$	$y_n=y_{n-1}+v_{1n-1}+v_{2n-1}+k$

$hy' = v_1$	$\frac{h^2}{2} y'' = v_2$	$k = \frac{h^3}{6} f/x, y, \frac{v_1}{h}, \frac{2v_2}{h^2})$
v_{1n-1}	v_{2n-1}	k_1
$v_{1n-1} + v_{2n-1} + \frac{3}{4} k_1$	$v_{2n-1} + \frac{3}{2} k_1$	k_2
$v_{1n-1} + v_{2n-1} + \frac{3}{4} k_1$	$v_{2n-1} + \frac{3}{2} k_2$	k_3
$v_{1n-1} + 2v_{2n-1} + 3k_3$	$v_{2n-1} + 3k_3$	k_4
$v_{1n} = v_{1n} + 2v_{2n} + k'$	$v_{2n} = v_{2n-1} + k''$	

ahol:

$$k = \frac{1}{2^{0}} /9k_1 + 6k_2 + 6k_3 - k_4/$$

$$k' = k_1 + k_2 + k_3$$

$$k'' = \frac{1}{2} /k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4/$$

Mivel a gép fixponttal működik, azért. ügyelni kell arra, hogy mind a közbülső, mid a végeredmények abszolut értékben $1-2^{-30}$-nál ne legyenek nagyobbak.

Legyen az $X = u(x,y)$ $Y = v(x,y)$

olyan transzformáció, amelyet az adott differenciálegyenletre alkalmazva olyan

$$Y''' = F(X, Y, Y', Y'') \quad Y(X_0) = Y_0 \quad Y'(X_0) = Y_0' \quad Y''(X_0) = Y_0''$$

differenciálegyenlethez vezet, amelyben:

/1/ $|Y'| \leq 1-2^{-30}$ $|Y''| \leq 1-2^{-30}$ $|Y'''| \leq 1-2^{-30}$ $|Y| < K < 1$ $|X| \leq 1-2^{-\dots}$

Az /1/ feltétel biztositja, hogy a közbülső eredmények sem csordulnak tul; a közbülső eredmények vizsgálatával meghatározzuk /1/-ben K értékét.

Ugyanis:
$$|v_{1n-1}| = |h\,y'| < h.$$
$$|v_{2n-1}| = \left|\frac{h^2}{2}y''\right| < \frac{h^2}{2}.$$
$$|k_i| = \left|\frac{h^3}{6}f(x,y,y',y'')\right| < \frac{h^3}{6}.$$

Legyen $|h| \leq 0{,}1$ / ennél nagyobb h-val nem számolunk/

Mivel:
$$|k| = \left|\frac{1}{20}(9k_1 + 6k_2 + 6k_3 - k_4)\right| < \frac{1}{20}\,22\,\frac{h^3}{6} < \frac{h^3}{4}.$$
$$|k'| = |k_1 + k_2 + k_3| < 3\,\frac{h^3}{6} = \frac{h^3}{2}$$
$$|k''| = \left|\frac{1}{2}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\right| < \frac{1}{2}\,6\,\frac{h^3}{6} = \frac{h^3}{2}.$$

Igy a második oszlopban lévő

a/ $y_{n-1} + \alpha v_{1n-1} + \beta v_{2n-1} + \delta k_i$ tipusu közbülső összegekre
$(\alpha \leq 1,\ \beta \leq 1,\ \delta \leq 1)$

$$|y_{n-1} + \alpha v_{1n-1} + \beta v_{2n-1} + \delta k_i| < |y_{n-1}| + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6}$$

s $|y_{n-1}| + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} \leq 1 - 2^{-30}$. ha

$$|y_{n-1}| \leq 1 - 2^{-30} - \left(h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6}\right)$$

Ezzel a két tagból képzett összegekre is biztositottuk a tulcsordulás elkerülését.

A harmadik oszlopban lévő

$$v_{1n-1} + p\,v_{2n-1} + q\,k_i \qquad \text{b/}$$

tipusu összegekre $(p \leq 2\quad q \leq 3)$

Látható, hogy két-két tagon sem lép fel tulcsordulás, tehát a $v_{2n-1}+qk\ell$ összegzésél sem.

Hasonló meggondolással, mint az első és másodrendűnél látható, hogy ha alkalmasan választott K korlátokra

1/ $|X| < K < 1$ $|y'''| < 1 - 2^{-30}$. és $|y_0| < K_0 < 1$ $|y_0'| < K_1 < 1$.
$|y_0''| < K_2 < 1$

akkor $|y| < \mathfrak{M} < 1 - 2^{-30}$,

$|y'| \leq 1 - 2^{-30}$

$|y''| \leq 1 - 2^{-30}$.

Pozicióelosztás

Legyen az $f(x_n, y_n, y'_n, y''_n)$-t kiszámító szubrutin az α-tól α+k-1-ig terjedő pozíciókban, s ebben a szubrutinban fix pozíciókként jelöljük ki a következőket.

x_n	helye mindig	0001	
y_n	" "	0002	
y'_n	" "	0003	
y''_n	" "	0004	legyen.

Az $f(x_n, y_n, y'_n, y''_n)$-t mindig 0005-ben helyezzük el, s a szubrutinból való kiugráskor mindig 0006-nak adjuk át vezérlést. /0010/=24 fy α 7777

Konstansok

/0011/= $\frac{1}{2}$

/0012/= $\frac{1}{4}$

/0013/= $\frac{1}{8}$

/0014/= $\frac{3}{4}$

/0015/= $\frac{2}{3}$

/0016/= $\frac{1}{3}$

/0017/= $\frac{1}{6}$

/0020/= $\frac{1}{20}$

/0021/= 24 fy 0122 7777

/0022/=24 fy 0144 7777

/0023/=00 0003 0000

/0024/=24 fy 0171 7777

Paraméterek

/0025/= 04 0211 0001

/0026/= ϑ

/0030/= x_0= a

/0031/= y_0

/0032/= y'_0

/0033/= y''_0

/0034/= h

/0035/= ε

/0036/= b

Munkapozíciók

0037 0040 0041 0042 0043 0044
0045 0046 0047 0050 0051

<u>P r o g r a m</u>

0100	Πτ	05	0030	0001	x_0
0101	Πτ	05	0031	0002	y_0
0102	Πτ	05	0032	0003	y'_0
0103	Πτ	05	0033	0004	y''_0
0104	−,	11	0034	0036	
0105	↓+	20	0000	0037	
0106	×,	13	0034	0011	
0107	↓+	20	0000	0040	→ $\frac{h}{2}$
0110	↓×	23	0034	0041	→ $\frac{h^2}{2}$
0111	↓×,	33	0016	7777	
0112	↓×	23	0034	0042	
0113	×,	13	0003	0034	
0114	↓+	20	0000	0044	→ v_{10}
0115	×,	23	0004	0041	
0116	↓+	20	0000	0045	→ v_{20}
0117	Πτ	05	0002	0043	→ y_0
0120	Πτ.	05	0021	0006	
0121	Πу	24	0010	7777	
0122	×	03	0042	0005	k_1
0123	Πτ	05	0005	0046	k_1
0124	+	00	0040	0001	$x_{n-1} + \frac{h}{2}.$
0125	×,	13	0044	0011	
0126	↓+	20	0043	0002	
0127	×,	13	0045	0012	
0130	↓+	20	0002	0002	
0131	×,	13	0005	0013	
0132	↓+	20	0002	0002	
0133	×,	13	0014	0005	
0134	↓+,	30	0044	7777	
0135	↓+,	30	0045	7777	
0136	↓:	22	0034	0003	

0137	Πτ	05	0022	0006	
0140	:,	12	0015	0005	
0141	↓+,	30	0045	-	
0142	↓:,	32	0041	-	
0143	Πγ	24	0010	0004	
0144	+	00	0023	0006	
0145	×	03	0042	0005	
0146	Πγ	24	0140	0047	→ k_2
0147	×	03	0042	0005	
0150	−,	11	0047	0046	
0151	↓×	23	0035	0050	
0152	−,	11	0005	0047	
0153	↓(−1),	71	0050	-	
0154	ΣΠ	34	0155	0213	
0155	+	00	0040	0001	
0156	:,	12	0016	0005	
0157	↓+	20	0045	0004	
0160	+	00	0045	0044	
0161	↓+	20	0004	0050	
0162	↓:	22	0034	0003	
0162	:	02	0041	0004	
0164	+	00	0005	0047	
0165	Πτ	05	0024	0006	
0166	+	00	0044	0043	
0167	↓+	20	0005	0002	
0170	Πγ	24	0010	-	
0171	×	03	0042	0005	→ k_4
0172	↓+,	30	0046	-	
0173	↓×,	33	0011	-	
0174	↓+,	30	0047	-	
0175	↓+	20	0045	0004	
0176	+	00	0046	0047	
0177	↓+,	30	0044	-	
0200	↓+	20	0045	0003	
0201	:	02	0017	0047	
0202	:,	12	0016	0046	
0203	↓+,	30	0047	-	
0204	↓−,	31	0005	-	

o2o5	$\downarrow\times,$	33	oo2o	-
o2o6	$\downarrow+$	2o	oo43	ooo2
o2o7	$\Pi\tau$	o5	oo25	β
o21o	$\Pi\gamma$	24	$\beta+2.$	-
o211	$-,$	11	ooo1	oo37
o212	$\gamma\Pi$	34	megáll	o117
o213	$-$	o1	oo4o	ooo1
o214	$\Pi\tau$	o5	oo43	ooo2
o215	$:,$	12	oo34	oo44
o216	$\downarrow+$	2o	oooo	ooo3
o217	$:,$	12	oo41	oo45
o22o	$\downarrow+$	2o	oooo	ooo4
o221	$\times$	o3	oo11	oo34
o222	$-,$	11	oo34	oo26
o223	$\gamma\Pi.$	34	o1o4	megáll

Készitette: Szelezsán János
Ellenőrizte: Dömölki Bálint

Negyedrendű közönséges differenciálegyenlet megoldása Runge Kutta módszerrel.

Legyen adva az $y'''' = f/x,y,y',y'',y'''/$ differenciálegyenlet az $y/x_0/=y_0$ $y'/x_0/=y'_0$ $y''/x_0/= y''_0$ $y'''/x_0/ = y'''_0$ kezdeti feltételekkel. Ennek közelitő numerikus megoldását az (ab) intervallumban a Runge Kutta módszer szerint a következő séma alapján számithatjuk ki.

x	y
x_{n-1}	y_{n-1}
$x_{n-1}+\frac{1}{2}h$	$y_{n-1}+\frac{1}{2}v_{1n-1}+\frac{1}{4}v_{2n-1}+\frac{1}{8}v_{3n-1}+\frac{1}{16}k_1$
$x_{n-1}+\frac{1}{2}h$	$y_{n-1}+\frac{1}{2}v_{1n-1}+\frac{1}{4}v_{2n-1}+\frac{1}{8}v_{3n-1}+\frac{1}{16}k_1$
$x_{n-1}+h$	$y_{n-1}+v_{1n-1}+v_{2n-1}+v_{3n-1}+k_3$
$x_n= x_{n-1}+h$	$y_n= y_{n-1}+v_{1n-1}+v_{2n-1}+v_{3n-1}+k_3$

$hy' = v_1$
v_{1n-1}
$v_{1n-1}+v_{2n-1}+\frac{3}{4}v_{3n-1}+\frac{1}{2}k_1$
$v_{1n-1}+v_{2n-1}+\frac{3}{4}v_{3n-1}+\frac{1}{2}k_1$
$v_{1n-1}+2v_{2n-1}+3v_{3n-1}+4k_3$
$v_{1n}+v_{1n-1}+2v_{2n-1}+3v_{3n-1}+k'$

$\frac{h^2}{2}\,y'' = v_2$	$\frac{h^3}{6}\,y''' = v_3$	$k = \frac{h^4}{24}\, f/x, y, \frac{v_1}{h}, \frac{2v_2}{h^2}, \frac{6v_3}{h^3}/$	
v_{2n-1}	v_{3n-1}	k_1	k
$v_{2n-1}+\frac{3}{2}v_{3n-1}+\frac{3}{2}k_1$	$v_{3n-1}+2k_1$	k_2	k'
$v_{2n-1}+\frac{3}{2}v_{3n-1}+\frac{3}{2}k_1$	$v_{3n-1}+2k_2$	k_3	k''
$v_{2n-1}+3v_{3n-1}+6k_3$	$v_{3n-1}+4k_3$	k_4	k'''
$v_{2n}=v_{2n-1}+3v_{3n-1}+k''$	$v_{3n}=v_{3n-1}+k'''$		

itt: $k = \frac{1}{15}\,/8k_1+4k_2+4k_3-k_4/,$

$k' = \frac{1}{5}\,/9k_1+6k_2+6k_3-k_4/,$

$k'' = 2/k_1+k_2+k_3/,$

$k''' = \frac{2}{3}\,/k_1+2k_2+2k_3+k_4/.$

Mivel a gép fixponttal működik, ezért ügyelni kell arra, hogy mind a közbülső, mind a végeredmények abszolut értékben $1-2^{-30}$-nál ne legyenek nagyobbak.

Legyen az $X = u(x,y)$ $Y = v(x,y)$ olyan transzformáció, amely az adott differenciálegyenletre alkalmazva olyan

$Y^{IV} = F(X,Y,Y',Y'',Y''')$ differenciálegyenlethez vezet, amelyben:

/1/ $|Y^{IV}| < 1$ $|Y'''| < 1$ $|Y''| < 1$ $|Y'| < 1$ $|Y| < K < 1$.
$|X| < 1$

Az /1/ feltétel biztositja, hogy a közbülső eredmények sem csordulnak tul. A közbülső eredmények vizsgálatával meghatározzuk K értékét is.

Ugyanis legyen $h = 0,1$.

Igy: $|v_{1n-1}| = |hy'| < h$.

$$|v_{2n-1}| = \left|\frac{h^2}{2} y''\right| < \frac{h^2}{2}.$$

$$|v_{3n-1}| = \left|\frac{h^3}{6} y'''\right| < \frac{h^3}{6}$$

$$|k_i| = \left|\frac{h^4}{24} f(x,y,y',y'',y''')\right| < \frac{h^4}{24}.$$

$$|k| = \left|\frac{1}{15}(8k_1+4k_2+4k_3-k_4)\right| < \frac{17}{15}\frac{h^4}{24} < \frac{h^4}{12}.$$

$$|k'| = \left|\frac{1}{5}(9k_1+6k_2+6k_3-k_4)\right| \leq \frac{1}{5} 22 \frac{h^4}{24} < \frac{h^4}{5}.$$

$$|k''| = \left|2\left(3\frac{h^4}{24}\right)\right| = \frac{h^4}{4}.$$

$$|k'''| = \left|\frac{2}{3}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)\right| < \frac{2}{3} 6 \frac{h^4}{24} = \frac{h^4}{6}$$

Ha két-két tagonként is képezzük ezeket az összegeket, akkor nincs tulcsordulás.

Az $y_{n-1} + \alpha v_{1n-1} + \beta v_{2n-1} + \gamma v_{3n-1} + \delta k_i$ tipusu közbülső eredményekre a következő becslést adhatjuk
$(\alpha \leq 1;\ \beta \leq 1;\ \gamma \leq 1;\ \delta \leq 1)$.

$$|y_{n-1} + \alpha v_{1n-1} + \beta v_{2n-1} + \gamma v_{3n-1} + \delta k_i| <$$
$$< |y_{n-1}| + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24} < 1 - 2^{-30} \text{ ha}$$
$$|y_{n-1}| < 1 - 2^{-30} - \left(h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24}\right).$$

Látható, hogy az összegezést két két tagonként hajtva végre, tulcsordulás nem lép fel.

A $v_{1n-1} + p v_{2n-1} + q v_{3n-1} + r k_i$ összegre $(p \le 2,\ q \le 3,\ r \le 4)$

$$|v_{1n-1} + p v_{2n-1} + q v_{3n-1} + r k_i| <$$
$$< h + 2\frac{h^2}{2} + 3\frac{h^3}{6} + 4\frac{h^4}{24} = h + h^2 + \frac{h^3}{2} + \frac{h^4}{6}$$

A $v_{2n-1} + \delta v_{3n-1} + \vartheta k_i$ összegre

$(\delta \le 3 \quad \vartheta \le 6)$

$$|v_{2n-1} + \delta v_{3n-1} + \vartheta k_i| < \frac{h^2}{2} + 3\frac{h^3}{6} + 6\frac{h^4}{24} =$$
$$= \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{2} + \frac{h^4}{4}$$

Tehát $K = 1 - 2^{-30} - \left(h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24}\right)$ -et véve, /1/ feltétel biztositja a tulcsordulás elkerülését.

Hasonló meggondolással, mint az első és másodrendűnél belátható, hogy ha alkalmasan választott K korlátokra

1*) $|x| < K < 1 \quad |y^{IV}| < 1 - 2^{-30}$ és $|y_0| < K_0 < 1.$

$|y_0'| < K_1 < 1 \quad |y_0''| < K_2 < 1 \quad |y_0'''| < K_3 < 1.$

akkor:

$$|y| < M_1 < 1.$$
$$|y'| < M_2 < 1$$
$$|y''| < M_3 < 1$$
$$|y'''| < M_4 < 1$$

azaz, /1/ feltétel teljesül.

Pozícióelosztás

Legyen az $f(x_n, y_n, y_n', y_n'', y_n''')$ -t kiszámító szubrutin az α -tól $\alpha+k-1$ -ig terjedő pozíciókban s ebben a szubrutinban fix pozíciókként jelöljük ki a következőket:

x_n helye mindig 0001
y_n helye mindig 0002
y_n' " " 0003
y_n'' " " 0004
y_n''' " " 0005 legyen

Az $f(x_n, y_n, y_n', y_n'', y_n''')$ -t mindig 0006-ben helyezzük el, s a szubrutinból való kiugráskor mindig 0007-nek adjuk át a vezérlést. /0010/= Пy α 7777

Konstansok

/0011/= $\frac{1}{2}$
/0012/= $\frac{1}{4}$
/0013/= $\frac{1}{8}$
/0014/= $\frac{1}{16}$
/0015/= 3/4
/0016/= 2/3
/0017/= 1/3
/0020/= $\frac{1}{6}$
/0021/= ~ 0252 0001
/0022/= 1/5
/0024/= $\frac{1}{15}$
/0025/= Пy 0130 —
/0026/= Пy 0162 —
/0027/= 00 0003 0000
/0030/= Пy 0220 0000

Paraméterek

/0031/= x_0
/0032/= y_0
/0033/= y_0'
/0034/= y_0''
/0035/= y_0'''
/0036/= h
/0037/= b
/0040/= ε
/0041/= ϑ

Munkapoziciók.

0051 0042 0043 0044 0045 0046 0047
0052
0053 0050 0056 0057 0060 0061
0054
0055

Program

0100	Πτ	05	0031	0001	→ x_0
0101	Πτ	05	0032	0002	→ y_0
0102	Πτ	05	0033	0003	→ y_0'
0103	Πτ	05	0034	0004	→ y_0''
0104	Πτ	05	0035	0005	→ y_0'''.
0105	→	11	0036	0037	
0106	↓+	20	0000	0051	→ $b-h$.
0107	×,	13	0011	0036	
0110	↓+	20	0000	0052	→ $\frac{h}{2}$
0111	↓×	23	0036	0053	→ $\frac{h^2}{2}$
0112	↓×,	33	0017	7777	
0113	↓×	23	0036	0054	→ $\frac{h^3}{6}$.
0114	↓×,	33	0012	7777	
0115	↓×	23	0036	0055	→ $\frac{h^4}{24}$.
0116	×,	13	0036	0003	
0117	↓+	20	0000	0057	→ v_{1n-1}
0120	×,	13	0053	0004	
0121	↓+	20	0000	0060	→ v_{2n-1}
0122	×,	13	0054	0005	
0123	↓+	20	0000	0061	→ v_{3n-1}
0124	Πτ	05	0002	0056	
0125	Πτ	05	0025	0007	
0127	Πy.	24	0010	7777	
0130	×	03	0055	0006	→ k_1
0131	Πτ	05	0006	0042	
0132	+	00	0052	0001	→ $x_{n-1} + \frac{h}{2}$.
0133	×,	13	0011	0057	
0134	↓+	20	0056	0002	
0135	×,	13	0060	0012	
0136	↓+	20	0002	0002	
0137	×,	13	/0061/	0013	
0140	↓+	20	0002	0002	
0141	×,	13	0006	0014	
0142	↓+	20	0002	0002	→ y
0143	×,	13	0011	0006	
0144	↓+.	20	0057	0003	

0145	×,	13	0061	0015	
0146	↓+,	30	0060	7777	
0147	↓+,	30	0003	7777	
0150	↓:	22	0036	0003	
0151	+,	10	0061	0006	
0152	↓:,	32	0016	7777	
0153	↓+,	30	0060	7777	
0154	↓:	22	0053	0004	
0155	+,	10	0006	0006	
0156	↓+,	30	0061	7777	
0157	↓:	22	0054	0005	
0160	Πτ	05	0026	0007	
0161	Πy	24	0010	8777	→ k_2.
0162	+	00	0027	0026	
0163	×	03	0055	0006	
0164	Πy	24	0155	0043	
0165	−	01	0027	0026	
0166	×	03	0055	0006	
0167	Πτ	05	0006	0044	→ k_3
0170	−,	11	0043	0042	
0171	↓×	23	0040	0007	→ a lépésköz vizsgálata
0172	−,	11	0044	0043	
0173	↓|−|,	71	0007	7777	
0174	ΣΠ·	34	0175	0253	
0175	+	00	0052	0001	→ $x_{n-1}+h$.
0176	:,	12	0012	0006	
0177	↓+	20	0061	0005	→ $v_{3n-1}+4k_3$
0200	+	00	0061	0060	→ $v_{2n-1}+v_{3n-1}$
0201	↓+	20	0057	0050	
0202	↓+	20	0060	0047	
0203	↓+	20	0005	0003	
0204	+	00	0061	0047	
0205	:,	12	0011	0061	
0206	↓+	20	0060	0046	
0207	:,	12	0020	0006	

0210	↓+	20	0046	0004
0211	+	00	0056	0050
0212	↓+	20	0006	0002
0213	:	02	0036	0003
0214	:	02	0053	0004
0215	:	02	0054	0005
0216	⥣x	05	0030	0007
0217	⥣y	24	0010	—
0220	×	03	0055	0006
0221	+	00	0044	0043
0222	↓+	20	0042	0045
0223	↓:,	32	0011	
0224	↓+	20	0046	0060
0225	↓:	22	0053	0004
0226	+,	10	0043	0006
0227	↓+,	30	0045	—
0230	↓×,	33	0016	—
0231	↓+	20	0061	0061
0232	↓:	22	0054	0048
0233	:,	12	0017	0042
0234	↓-	21	0006	0006
0235	:,	12	0020	0045
0236	↓+	20	0006	0043
0237	—	01	0042	0006
0240	:,	12	0012	0063
0241	↓+,	30	0006	—
0242	↓×,	30	0024	—

0243	↓+	2o	oo5o	ooo2
o244	×,	13	oo22	oo43
o245	↓+	2[illegible]	oo47	oo57
o246	↓:	22	oo36	ooo3
o247	Πτ	o5	oo21	β
o25o	Πγ	24	β+2	—
o251	−,	11	ooo1	oo51
o252	χΠ·	34	megáll	o124
o253	−	o1	oo52	ooo1
o254	:,	12	oo36	oo57
o255	↓+	2o	oooo	ooo3
o256	:,	12	oo53	oo6o
o257	↓+	2o	oooo	ooo4
o26o	:,	12	oo54	oo61
o261	↓+	2o	oooo	ooo5
o262	Πτ	o5	oo56	ooo2
o263	×	o3	oo11	oo36
o264	↓−,	31	oo41	—
o265	χΠ·	34	m[illegible]gáll	o1o5
o266				